

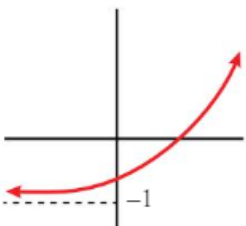
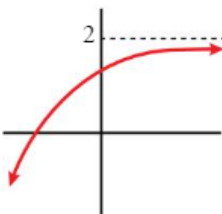
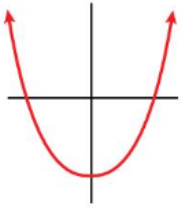
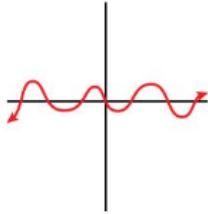
TEMA 1. LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

1. LÍMITES DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO

El **LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$** es el valor al que se aproxima la función cuando la x toma valores muy grandes ($x \rightarrow +\infty$) o muy pequeños ($x \rightarrow -\infty$).

1.1 GRÁFICAMENTE

Ejemplos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$	c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{no existe}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \text{no existe}$
--	---	--	---

1.2 ANALÍTICAMENTE

$\text{Si } a > 0 \rightarrow (+\infty)^a = +\infty. \quad \text{Si } a < 0 \rightarrow (+\infty)^a = 0$
$\text{Si } a > 1 \rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = 0 \end{cases}$
$\text{Si } 0 < a < 1 \rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = +\infty \end{cases}$

Ejemplos:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = 5 \cdot (+\infty)^3 = +5 \cdot +\infty = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 = -5 \cdot (+\infty)^3 = -5 \cdot +\infty = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 = -5 \cdot (-\infty)^3 = -5 \cdot -\infty = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 = 5 \cdot (-\infty)^3 = +5 \cdot -\infty = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +3 \cdot (-\infty)^2 = +3 \cdot +\infty = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = -3 \cdot (-\infty)^2 = -3 \cdot +\infty = -\infty$

- g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{(+\infty)^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$
- h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{-x^5} = \sqrt[3]{-(+\infty)^5} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$
- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-x^5} = \sqrt[3]{-(-\infty)^5} = \sqrt[3]{-(-\infty)} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$
- j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{-x^3} = \sqrt{-(+\infty)^3} = \sqrt{-(+\infty)} = \sqrt{-\infty} = \text{No existe}$
- k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^6} = \sqrt{(-\infty)^6} = \sqrt{(+\infty)} = +\infty$
- l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty^2} = 0$
- m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$
- n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = (+2)^{+\infty} = +\infty$
- o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = (+3)^{-\infty} = \frac{1}{3^\infty} = 0$
- p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty} = 0$
- q) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\infty} = 5^\infty = +\infty$

2. OPERACIONES CON LÍMITES

Los límites respetan las operaciones: si los límites existen, se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir y componer igual que las funciones.

$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \log f(x) = \log \left[\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right]$
$\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x)]^{f(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}$

Ejemplo 1. Sea $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = k, k > 0$, calcula:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty + k = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty \cdot k = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \frac{+\infty}{k} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \log f(x) = \log \left[\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right] = \log(+\infty) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x)]^{f(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)} = k^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < k < 1 \end{cases}$

Ejemplo 2. Sea $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$, calcula:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + h(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = +\infty + (-\infty) = \text{Indeterminación}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{h(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)} = \frac{+\infty}{-\infty} = \text{Indeterminación}$

S1. Ejercicios: pág. 26, ej. 31, 32, 33, 34 (pág. 9, ej. 1, 2; pág. 10, ej. 3, 4)

3. COMPARACIÓN DE INFINITOS

Cuando dos funciones crecen hacia infinito, comparar sus límites es comparar cuál de ellas 'corre' más rápido hacia el infinito.

Una exponencial de base mayor que 1 es de orden superior que cualquier potencia.
$a^x > x^n, \text{ con } a > 1$
Dadas dos exponenciales la que tenga mayor base será de orden superior.
$a^x > b^x \text{ si } a > b$
Dadas dos potencias la que tenga mayor grado será de orden superior.
$x^n > x^m \text{ si } n > m$
Un logaritmo es de orden inferior que cualquier potencia.
$x^n > \log x$

Ejemplo 1. Ordena de mayor a menor: $x^3, e^x, \sqrt{x}, \log x, 17x^2$.

$$e^x > x^3 > 17x^2 > \sqrt{x} > \log x$$

Ejemplo 2. Calcula estos límites:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2^x} = 0 \quad (2^x > x^3)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x^4}{x+5} = 0 \quad (x > \log x^4)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{\sqrt[3]{x^5}} = +\infty \quad (x^2 > \sqrt[3]{x^5})$

4. INDETERMINACIONES

Existen 7 tipos de indeterminaciones: $\frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \frac{0}{0}, \infty^0, 0^0$

4.1 INDETERMINACIÓN $\frac{\infty}{\infty}$

CASO: $x \rightarrow +\infty$

En una función racional para calcular el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ comparamos el grado del polinomio del numerador y del denominador.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^p + \dots}{bx^q + \dots} = \begin{cases} \text{Si grado de } P > \text{grado de } Q \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} = \pm\infty \\ \text{Si grado de } P = \text{grado de } Q \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} = \frac{a}{b} \\ \text{Si grado de } P < \text{grado de } Q \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} = 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+2x-1}{10x^2+7x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{10x^2} = \frac{+}{+} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3-5x^2-1}{6x^3-7x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3}{6x^3} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x-3}{-5x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{-5x^2} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^4+5x}{6-x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^4}{-x^3} = \frac{+}{-} = -\infty$$

CASO: $x \rightarrow -\infty$

Para calcular el límite cuando $x \rightarrow -\infty$ calculamos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$

Ejemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3+2x-1}{10x^2+7x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(-x)^3+2(-x)-1}{10(-x)^2+7(-x)+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3-2x-1}{10x^2-7x+3} = \frac{-}{+} = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3-5x^2-1}{6x^3-7x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3(-x)^3-5(-x)^2-1}{6(-x)^3-7(-x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-5x^2-1}{-6x^3-7x^2} = \frac{+3}{-6} = \frac{-1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^4+5x}{6-x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10(-x)^4+5(-x)}{6-(-x)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^4-5x}{6+x^3} = \frac{+}{+} = +\infty$$

4.2 INDETERMINACIÓN $0 \cdot \infty$

Este tipo de indeterminación se transforma en la de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ agrupando las funciones implicadas.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{x^2} \cdot \frac{2x^3 - 4}{x + 5} \right) = 0 \cdot \infty \text{ Indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x^3 - 20}{x^3 + 5x^2} \right) = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indet} = 10$$

S2. Ejercicios: pág. 26, ej. 35, 36, 37, 38a-c; pág. 27, ej. 44 (pág. 11, ej. 5, 7; pág. 12, ej. 8, 9)

***pág. 26, 38 c**

4.3 INDETERMINACIÓN $\infty - \infty$

Al restar dos expresiones infinitas obtenemos $= \infty - \infty$ **Indeterminación**

CASO 1. Raíz – raíz. Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

Ejemplo 1: Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 - \sqrt{x^4 + 4x} = \infty - \infty \text{ Indet} = \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^3 - x^2) = +\infty$

Ejemplo 2: Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{9x^2 + 5x}) = \infty - \infty \text{ Indet} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

Ejemplo 3: Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} = \infty - \infty \text{ Indet} =$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indet} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 4: Calcula

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1} = \infty - \infty \text{ Indet} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x})^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indet} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

CASO 2. Fracción – Fracción. Reducimos a común denominador.

Ejemplo 1: Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-2x}{x+3} - \frac{2x^4-5x^2}{x^2+3x} \right) = \infty - \infty \text{ Indet} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{2x^4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2x^2) = -\infty$

Ejemplo 2: Calcula

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{x+1} - \frac{x^3}{x^2-1} \right) &= \infty - \infty \text{ Indet} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2-3) \cdot (x-1) - x^3}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - 3x + 3 - x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3x + 3}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indet} = -1 \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Calcula

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-3}{x+1} - \frac{x^3}{x^2-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{-x+1} + \frac{x^3}{x^2-1} \right) = -\infty + \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2-3) \cdot (x+1) + x^3 \cdot (-1)}{-1 \cdot (x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3 - x^3}{-x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - 3}{-x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indet} = -1 \end{aligned}$$

S3. Ejercicios: *pág. 13, ej. 10, 11; pág. 15, ej. 14; pág. 27, ej. 40, 43 a-d; (pág. 30, ej. 2, 7; pág. 31, ej. 20)*

**pág. 13, ej. 10 b, f, 11 f; pág. 15, ej. 14 a, b*

4.3 INDETERMINACIÓN 1^∞

Número e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

Para calcular este tipo de límites existen dos métodos:

Método 1.

1º Comprobar que se trata de una indeterminación de tipo 1^∞ .

2º Expresar la base de la forma $(1 + \frac{1}{\blacksquare})$, dividiendo el numerador entre el denominador.

3º Transformar la base en $(1 + \frac{1}{\blacksquare})$.

4º Introducir en el exponente el denominador de la base $(1 + \frac{1}{\blacksquare})^{\blacksquare \cdot \frac{1}{\blacksquare}}$

5º Transformar en el número e: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\blacksquare} \right)^{\blacksquare} \right]^{\frac{1}{\blacksquare}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\blacksquare}}$

Método 2.

Aplicar la fórmula que se deduce de los pasos anteriores:

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-1] \cdot g(x)}$$

Ejemplos: Calcula los siguientes límites:

Método 1:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+5} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = 1^\infty \text{ Indet} \rightarrow \text{Dividimos } \begin{matrix} (x+1) & : & (x+5) \\ -4 & & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+5} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-4}{x+5} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+5}{-4}} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+5}{-4}} \right)^{\frac{x+5}{-4} \cdot \frac{-4 \cdot x^2+1}{x+5} \cdot \frac{x^2+1}{x}} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+5}{-4}} \right)^{\frac{x+5}{-4} \cdot \frac{-4x^2-4}{x^2+5x}} \right] = e^{-4} = \frac{1}{e^4} \end{aligned}$$

Método 2

$$\begin{aligned} \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+5}{x+2} \right)^{4x} &= 1^\infty \text{ Indet} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+2} - 1 \right) \cdot 4x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5-x-2}{x+2} \right) \cdot 4x} = \\ e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x+2} \right) \cdot 4x} &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{12x}{x+2} \right)} = e^{12} \end{aligned}$$

S4. Ejercicios: pág. 14, ej. 12, 13; pág. 26, ej. 39 a-g; pág. 27, ej. 45 (pág. 30, ej. 4, 5, 10; pág. 31, ej. 14)

***pág. 14, ej. 13 e, f; pág. 26, ej. 39 f; pág. 27, ej. 45 c**

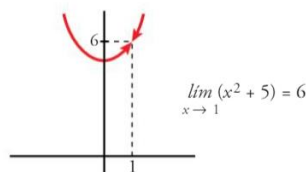
5. LÍMITES CUANDO $x \rightarrow \text{número}$

5.1 LÍMITE DE UN POLINOMIO

Para calcular el $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, sustituimos x por c y calculamos $f(c)$.

Ejemplo: Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 5) = 1^2 + 5 = 6$$



5.2 LÍMITE EN UNA FUNCIÓN “A TROZOS”

▪ Caso 1. Cálculo del límite en el punto de ruptura

Calculamos los límites laterales:

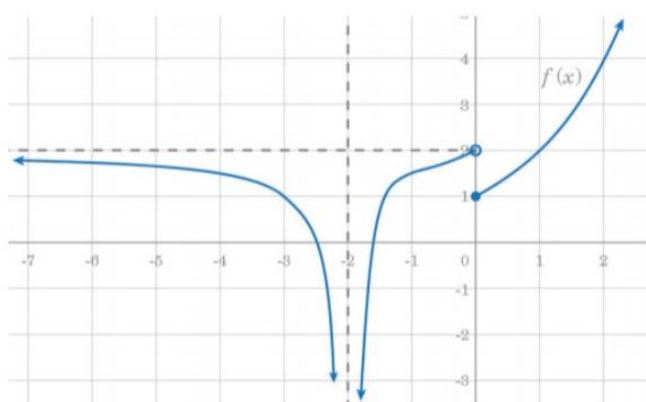
$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l \rightarrow \text{No existe límite}$$

▪ Caso 2. Cálculo del límite en otro punto cualquiera

En los tramos en que la función no presenta salto no hace falta calcular límites laterales, pues coincidirán.

Ejemplos: Calcula $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{cases} \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

5.3 LÍMITE EN FUNCIONES RACIONALES $f(x)=P(x)/Q(x)$

CASO 1. Si al sustituir x por c , $Q(c) \neq 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$

Ejemplo: Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{5x + 10} = \frac{3^2 - 4}{5 \cdot 3 + 10} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

CASO 2. Si al sustituir x por c $Q(c) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm \infty \rightarrow$

Calculamos los límites laterales, sustituyendo en puntos muy próximos a c por ambos lados.

Ejemplo: Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 4} = \frac{1^2 + 3}{1^2 - 5 \cdot 1 + 4} = \frac{4}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{0,9^2 + 3}{0,9^2 - 5 \cdot 0,9 + 4} = (12,29) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1,1^2 + 3}{1,1^2 - 5 \cdot 1,1 + 4} = (-14,5) = -\infty$$

CASO 3. Si al sustituir x por c $Q(c) = 0$ y $P(c) = 0 \rightarrow$ Indeterminación $\frac{0}{0}$.

- TIPO 1. Factorizamos por Ruffini y simplificamos.
- TIPO 2. Aplicamos la Regla de l'Hospital.

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

TIPO 1

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \frac{(-2)^2 - 4}{(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 10} = \frac{0}{0} \text{ Indet}$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 10 = 0$$

1	2	5	10
-2	-2	0	-10
1	0	5	0

$$x^2 + 5 = 0 \rightarrow x^2 = -5 \rightarrow x = \sqrt{-5}$$

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 10 = (x + 2)(x^2 + 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x^2 + 5)} = \frac{x - 2}{x^2 + 5} = \frac{-2 - 2}{(-2)^2 + 5} = \frac{-4}{9}$$

S5. Ejercicios: pág. 16, ej. 16, 17; pág. 17, ej. 18; (pág. 27, ej. 49, 51)

Ejemplo 2: Calcula

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 1}{1 - x} \right)^{\frac{1}{x+1}} &= \left(\frac{2}{2} \right)^{\frac{1}{0}} = 1^\infty \text{ Indet} = e^{\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x^2 + 1}{1 - x} - 1 \right] \cdot \frac{1}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x^2 + 1 - 1 + x}{1 - x} \right] \cdot \frac{1}{x+1}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x^2 + x}{1 - x} \right] \cdot \frac{1}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{1 - x^2}} = e^{\frac{0}{0} \text{ Indet}} = e^{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(1-x)(1+x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{1-x}} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

TIPO 2. Regla de l'Hopital

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Ejemplo : Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{x - 3} = \frac{2^3 - 8}{3 - 3} = \frac{0}{0} \text{ Indet} \rightarrow L'H = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x \cdot \ln 2}{1} = 8 \ln 2$$

S6. Ejercicios: pág. 17, ej. 19; pág. 27, ej 50 d, f; pág. 51, ej. 28, 29; (pág. 62, ej. 100 pág. 63, ej. 5; pág. 64, ej. 15, 19, 22; pág. 65, ej. 23, 27, 33). *pág. 17, ej. 19 b, d, e

6. CONTINUIDAD

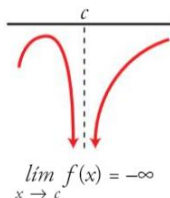
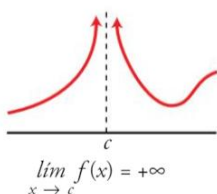
Una función $f(x)$ es **CONTINUA EN EL PUNTO** $x = c$ si cumple:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

Existen tres tipos de **DISCONTINUIDADES**:

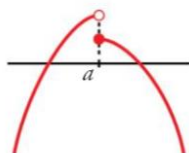
Discontinuidad de salto infinito

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$$



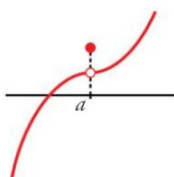
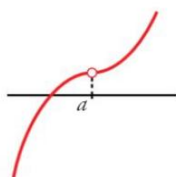
Discontinuidad de salto finito

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$



Discontinuidad evitable

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq f(c)$$



6.1 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN A TROZOS

Las funciones a trozos pueden ser discontinuas en los puntos de ruptura.

1º Calculamos los límites laterales y valor de la función en los puntos de ruptura.

2º Clasificamos el tipo de discontinuidad.

Ejemplo 1: Estudia la continuidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ 2x - 1 & 0 < x < 2 \\ x + 5 & x \geq 2 \end{cases}$$

Los puntos de ruptura son $x = 0$, $x = 2$

$x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - 1) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \rightarrow \text{La función es continua en } x = 0$$

$x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 5) = 2 + 5 = 7$$

$$f(2) = 2 + 5 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow \text{La función es discontinua de salto finito en } x = 2$$

Ejemplo 2: Halla el valor de k para que la función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x \leq 1 \\ x + k & x > 1 \end{cases}$$

La función será continua si se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 5) = 2 \cdot 1 - 5 = 2 - 5 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + k) = 1 + k$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$1 + k = -3 \rightarrow k = -3 - 1 \rightarrow k = -4 \rightarrow$$

La función será continua si $k = -4$

S7. Ejercicios: pág. 19, ej. 20, 22; pág. 28, ej. 56, 61, 62 c-d

***pág. 19, ej. 22 a, b; pág. 28, ej. 62 c, d.**

6.2 CONTINUIDAD DE FUNCIONES RACIONALES $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Las funciones de tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ son discontinuas en los valores que anulan el denominador.

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación.

2º Estudiamos el tipo de discontinuidad sustituyendo la solución de la ecuación en la función.

- Si al sustituir $Numerador \neq 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{número}{0} = \pm\infty$

La función es discontinua de salto infinito en dicho punto y es necesario calcular los límites laterales.

- Si al sustituir $Numerador = 0 \rightarrow f \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0} \rightarrow$ Factorizamos, simplificamos y volvemos a sustituir.
 - Si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{número}{0} \rightarrow$ Discontinua de salto infinito.
 - Si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = número \rightarrow$ Discontinua evitable.

Ejemplo: Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - x - 2}$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{+1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

La función es discontinua en $x = 2$ y $x = -1$.

$x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2}{(-1)^2 - (-1) - 2} = \frac{-3}{0} \rightarrow \text{Discontinua de salto infinito en } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{(-1,1)^3 - 2 \cdot (-1,1)^2}{(-1,1)^2 - (-1,1) - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{(-0,9)^3 - 2 \cdot (-0,9)^2}{(-0,9)^2 - (-0,9) - 2} = +\infty$$

$x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2^3 - 2 \cdot 2^2}{2^2 - 2 - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{(x+1)} = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

Discontinua evitable en $x = 2$

S8. Ejercicios: pág.28, ej. 57, 58, 59, 62 a-b. (pág.19, ej. 21)

***pág. 19, ej. 21 c; pág. 28, ej. 57 d; pág. 28, ej. 58 a-c.**

7. TEOREMA DE BOLZANO

Si una función $f(x)$, es continua en un intervalo $[a, b]$ y $\text{signof}(a) \neq \text{signof}(b) \rightarrow$ existe al menos un $c \in]a, b[$ que cumple $f(c) = 0$.

Ejemplo:

- a) Comprueba que la función $f(x) = x^3 + 2x - 2$ cumple las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 1]$.
- b) ¿Eres capaz de reducir el intervalo en el que se puede aplicar el Teorema?
- a) Al ser una función polinómica es continua en $\mathbb{R}$ y por tanto también en el intervalo $[0, 1]$.

$$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$$

$$f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 - 2 = 1 > 0$$

$$\text{signo } f(0) \neq \text{signof}(1) \rightarrow \exists c \in]0, 1[, f(c) = 0$$

- b) Resolvemos la ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,77 \rightarrow$ Tomamos un número mayor que 0,77, por ejemplo 0,8: $f(0,8) = 0,8^3 + 2 \cdot 0,8 - 2 = 0,112 > 0$

Podemos reducir el intervalo a $[0, 0'8]$

CONSECUENCIA DEL TEOREMA

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b) \rightarrow$ existe al menos un $c \in]a, b[$ que cumple $f(c) = g(c)$

Demostración:

Si definimos la función $h(x) = f(x) - g(x) \rightarrow h(a) = f(a) - g(a) > 0, h(b) = f(b) - g(b) < 0 \rightarrow$ aplicando el Teorema de Bolzano $\exists c \in]a, b[/ h(c) = 0 \rightarrow \exists c \in]a, b[/ f(c) - g(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$

Ejemplo: Comprueba que las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = 3^x$ se cortan en un punto.

Dos funciones se cortan en un punto si $\rightarrow \exists c / f(c) = g(c)$.

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 3 - 3^x$.

Podemos afirmar que $h(x)$ es continua en todos los reales y por tanto también en el intervalo $[0, 1]$

$$h(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 - 3^0 = 3 - 1 = 2 > 0$$

$$h(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 - 3^1 = -1 < 0$$

$$\text{signo } h(0) \neq \text{signoh}(1) \rightarrow \exists c \in]0, 1[/ h(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$$

S9. Ejercicios: pág. 20, ej. 23; pág. 21, ej. 27; pág. 70, ej. 70, 73; pág. 30, ej. 3, 6, 9; pág. 31, ej. 16, 24.

7.1 TEOREMA DE DARBOUX o TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b] \rightarrow$ toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$ en un intervalo $]a, b[$.

Es decir, dado cualquier valor m , tal que $f(a) < m < f(b) \rightarrow \exists c / f(c) = m$

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 2}$ prueba que existe un valor $m \in]6, 8[/ f(m) = \sqrt{7}$.

$$f(6) = \frac{6^2 - 5 \cdot 6}{6 - 2} = \frac{3}{2} < \sqrt{7}$$

$$f(8) = \frac{8^2 - 5 \cdot 8}{8 - 2} = \frac{36}{7} > \sqrt{7}$$

Aplicando el Teorema de Darboux existe un valor $m \in]6, 8[/ f(m) = \sqrt{7}$.

S10. Ejercicios: pág. 21, ej. 25; pág. 31, ej. 26.

S11. Ejercicios: Repaso