

TEMA 3. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

1. ESTUDIO DE UNA FUNCIÓN

Para realizar un estudio riguroso de una función seguiremos los siguientes pasos:

1. Dominio de una función.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
 - a. Verticales.
 - b. Horizontales.
 - c. Oblicuas.
5. Monotonía (crecimiento/decrecimiento)
6. Extremos relativos (máximos/mínimos relativos)
7. Curvatura (concavidad/convexidad)
8. Puntos de inflexión.

1.1 DOMINIO

El **DOMINIO** de una función, $Domf$, es el conjunto de valores de x para los que está definida la función.

La mayoría de las funciones con las que trabajamos existen en todos los reales. No obstante, deberemos prestar atención a tres casos especiales:

1. Funciones racionales.

Una fracción algebraica no existe si el denominador es cero.

Ejemplo: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x}$

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(x - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \end{cases}$$

2º El dominio serán todos los valores reales menos las soluciones de la ecuación.

$$Domf = \mathbb{R} - \{0, 5\}$$

2. Funciones irracionales

Una raíz de índice par no existe si el número de dentro es negativo.

Ejemplo 1: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

1º Igualamos el radicando a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 5 = 7$	$0^2 - 4 \cdot 0 - 5 = -5$	$6^2 - 4 \cdot 6 - 5 = 7$	
+	-	+	

3º El dominio serán los intervalos donde los valores sean positivos.

$$\text{Dom}f = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$$

Ejemplo 2: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2x-5}}$

1º Hallamos los valores que anulan al numerador y al denominador.

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$2x - 5 = 0 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$x + 3$	$-4 + 3 = -1 \rightarrow -$	$0 + 3 = +3 \rightarrow +$	$0 + 3 = +3 \rightarrow +$	$3 + 3 = +6 \rightarrow +$	
$2x - 5$	$2 \cdot (-4) - 5 = -13 \rightarrow -$	$2 \cdot 0 - 5 = -5 \rightarrow -$	$2 \cdot 0 - 5 = -5 \rightarrow -$	$2 \cdot 6 - 5 = +1 \rightarrow +$	
$\frac{x+3}{2x-5}$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{+}{+} = +$	

3º El dominio serán los intervalos donde los valores sean positivos, sin incluir el valor que anula al denominador.

$$\text{Dom}f = (-\infty, -3] \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

3. Funciones logarítmicas

No existe el logaritmo de un número negativo ni el de cero.

Ejemplo: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

1º Igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

$-\infty$	0	3	$+\infty$
$(-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4$	$1^2 - 3 \cdot 1 = -2$	$4^2 - 3 \cdot 4 = 4$	
+	-	+	

3º El dominio serán los intervalos donde los valores sean positivos, sin incluir los extremos donde se anula.

$$\text{Dom}f = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

S1. Ejercicios: pág. 69, ej. 1, 2 (pág. 82, ej. 15, 16).

1.2 PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

- **CORTA LOS PUNTOS CON EL EJE X** de la forma $(a, 0) \rightarrow$ Igualamos la función a cero y resolvemos la ecuación $f(x) = 0$
- **PUNTO DE CORTE CON EL EJE Y** de la forma $(0, b) \rightarrow$ Sustituimos la $x = 0$ y calculamos el valor de $f(0)$.

1.3 SIMETRÍA

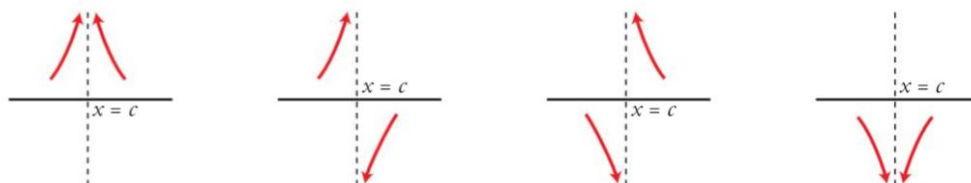
- Una función presenta una **SIMETRÍA PAR** o simetría respecto al eje de ordenadas si $f(-x) = f(x)$.
- Una función presenta una **SIMETRÍA IMPAR** o simetría respecto al origen de coordenadas si $f(-x) = -f(x)$.

1.4 ASÍNTOTAS

Cuando una rama infinita se aproxima a una recta a esta se le llama **ASÍNTOTA**.

Asíntota vertical

Las **ASÍNTOTAS VERTICALES** son de la forma $x = c$ donde c es un valor donde la función presenta una discontinuidad de salto infinito. Es decir, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$.

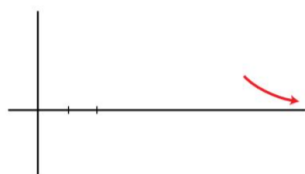


1º En las funciones racionales, igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación para el valor de la recta $x = c$.

2º Calculamos los límites laterales sustituyendo en valores próximos para conocer la posición de la curva respecto a la asíntota.

Asíntota horizontal

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ entonces la recta $y = l$ es una **ASÍNTOTA HORIZONTAL**.



1º Calculamos el límite de la función cuando $x \rightarrow \infty$ para obtener la ecuación de la recta $y = l$.

2º Tomamos un valor grande y otro pequeño para conocer la posición de la curva respecto a la asíntota.

Ejemplo: Halla las asíntotas verticales y horizontales de la función y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

$$2 \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x}$$

ASÍNTOTAS VERTICALES

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación.

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{matrix}$$

Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 2$

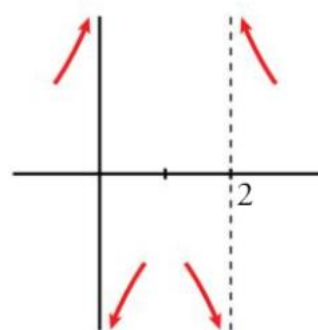
2º Estudiamos la posición de la curva respecto a cada una de ellas calculando los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{(-0,01)^2 + 1}{(-0,01)^2 - 2 \cdot (-0,01)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{(0,01)^2 + 1}{(0,01)^2 - 2 \cdot (0,01)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{(1,99)^2 + 1}{(1,99)^2 - 2 \cdot (1,99)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{(2,01)^2 + 1}{(2,01)^2 - 2 \cdot (2,01)} = +\infty$$



ASÍNTOTA HORIZONTAL

1º Calculamos el límite de la función cuando $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow y = 1$$

Asíntota horizontal: $y = 1$

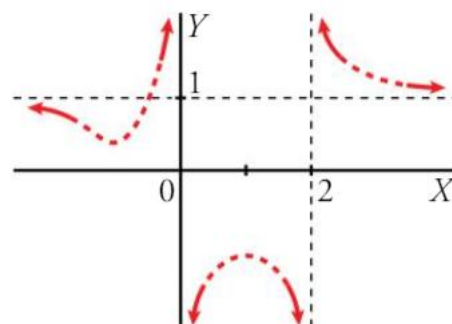
2º Estudiamos la posición de la curva respecto a la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \frac{1000^2 + 1}{1000^2 - 2 \cdot 1000} = 1^+$$

→ Por encima de 1

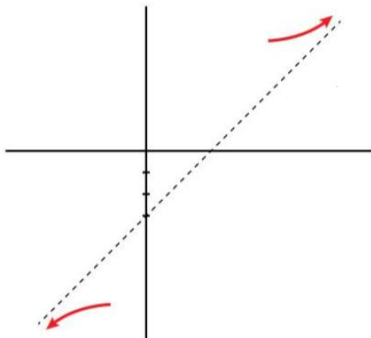
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \frac{(-1000)^2 + 1}{(-1000)^2 - 2 \cdot (-1000)} = 1^-$$

→ Por debajo de 1



Asíntota oblicua

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty$, $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$ entonces $y = mx + n$ es una **ASÍNTOTA OBLICUA**.



NOTA: Si se trata de una función racional basta con realizar la división y el cociente será la asíntota buscada.

Ejemplo: Halla las asíntotas de la función y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-3}$$

ASÍNTOTAS VERTICALES

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación.

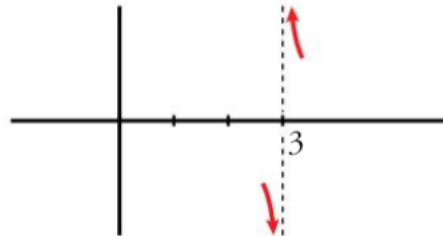
$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Asíntota vertical: $x = 3$

2º Estudiamos la posición de la curva respecto a cada una de ellas calculando los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{2 \cdot (2,9)^2}{2,9 - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{2 \cdot (3,1)^2}{3,1 - 3} = +\infty$$



ASÍNTOTA HORIZONTAL/OBLICUA

1º Calculamos el límite de la función cuando $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x-3} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2}{x^2 - 3x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x-3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x(x-3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 6x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x-3} = 6$$

La ecuación de la asíntota oblicua es $y = 2x + 6$

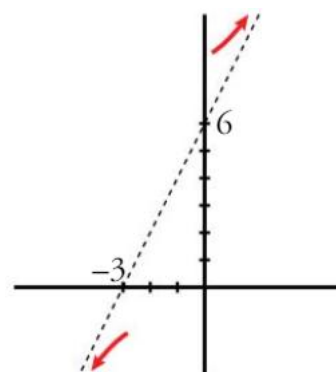
2º Estudiamos la posición de la curva respecto a la asíntota calculando $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{2x^2}{x-3} - (2x+6) = \frac{2x^2 - (2x+6) \cdot (x-3)}{x-3}$$

$$= \frac{2x^2 - (2x^2 - 6x + 6x - 18)}{x-3} = \frac{18}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{18}{x-3} = -\infty$$



NOTA: Dividiendo $2x^2 : (x-3) = 2x + 6$

S2. Ejercicios: pág. 70, ej. 3, 4; pág. 71, ej. 5, 6. (pág. 82, ej. 19, 20, 21)

1.5 MONOTONÍA

- Si $f'(x_0) > 0 \rightarrow$ la función es **CRECIENTE** en $x = x_0$.
- Si $f'(x_0) < 0 \rightarrow$ la función es **DECRECIENTE** en $x = x_0$.

1.6 EXTREMOS RELATIVOS

Si $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ Hay un **MÁXIMO** o **MÍNIMO RELATIVO** en $x = x_0$.

1.7 CURVATURA

- Si $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ la función es **CÓNCAVA** en $x = x_0$.
- Si $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ la función es **CONVEXA** en $x = x_0$.

1.8 PUNTOS DE INFLEXIÓN

Si $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ Hay un **PUNTO DE INFLEXIÓN** en $x = x_0$

2 FUNCIONES POLINÓMICAS

Ejemplo: Representa la siguiente función polinómica

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

1. Dominio. $Domf = \mathbb{R}$

2. Cortes con los ejes.

Corte con el eje OY:

$$x = 0 \rightarrow y = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 \rightarrow (0, 4)$$

Corte con el eje OX:

$$y = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = 2, x = -1 \rightarrow (2, 0), (-1, 0)$$

3. Simetría

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4 \rightarrow \text{No es simétrica}$$

4. Asíntotas.

Asíntota vertical. No existe ya que $Domf = \mathbb{R}$.

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x^2 + 4 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x^2 + 4 = -\infty$$

No existe asíntota horizontal.

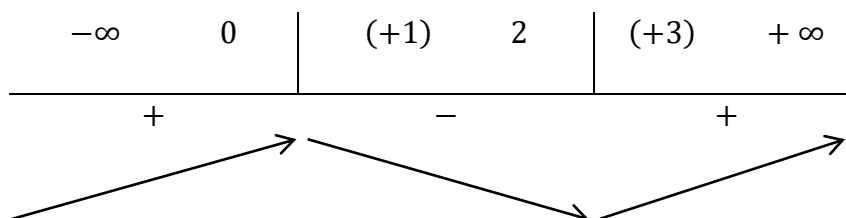
Asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x} = \infty \rightarrow \text{No existe asíntota oblicua.}$$

5. Monotonía.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(3x - 6) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 6 = 0 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$



$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = +$$

$$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -$$

$$f'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = +$$

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 2)$

6. Extremos relativos.

Hay un máximo en $x = 0 \rightarrow f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 \rightarrow (0, 4)$

Hay un mínimo en $x = 2 \rightarrow f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0 \rightarrow (2, 0)$

7. Curvatura.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \rightarrow f''(x) = 6x - 6 \rightarrow 6x - 6 = 0 \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = 1$$

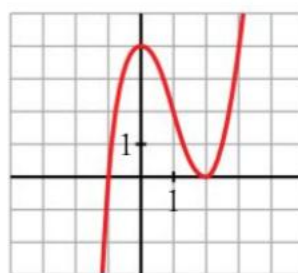
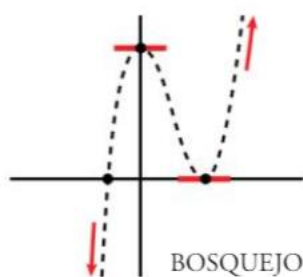
$-\infty$	1	∞
$f''(0) = -6$		$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = +6$
-		+
$\cap$		$\cup$

La función es convexa en $(-\infty, 1)$ y cóncava en $(1, +\infty)$

8. Punto de inflexión.

Hay un punto de inflexión en $x = 1 \rightarrow f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = -1 \rightarrow (1, -1)$

9. Representación:



S3. Ejercicios: pág. 74, ej. 9. (pág. 83, ej. 46, 47, 48)

3 FUNCIONES RACIONALES

Ejemplo 1: Representa la siguiente función racional

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + x - 2}$$

1. Dominio.

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

2. Cortes con los ejes.

Corte con el eje OY:

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{3 \cdot 0^2}{0^2 + 0 - 2} = \frac{0}{-2} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Corte con el eje OX:

$$y = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{x^2 + x - 2} = 0 \rightarrow 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

3. Simetría.

$$f(-x) = \frac{3(-x)^2}{(-x)^2 + (-x) - 2} = \frac{3x^2}{x^2 - x - 2} \rightarrow \text{No es simétrica.}$$

4. Asíntotas.

Asíntotas verticales. Posibles asíntotas verticales en $x = -2, x = 1 \rightarrow$
 Estudiamos continuidad

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{3 \cdot (-2)^2}{(-2)^2 + (-2) - 2} = \frac{12}{0} \rightarrow \text{Discontinua de salto infinito}$$

$$AV: x = -2 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{3 \cdot (-2,1)^2}{(-2,1)^2 + (-2,1) - 2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{3 \cdot (-1,9)^2}{(-1,9)^2 + (-1,9) - 2} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3 \cdot 1^2}{1^2 + 1 - 2} = \frac{3}{0} \rightarrow \text{Discontinua de salto infinito}$$

$$AV: x = 1 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3 \cdot (0,9)^2}{(0,9)^2 + (0,9) - 2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3 \cdot (1,1)^2}{(1,1)^2 + (1,1) - 2} = +\infty \end{cases}$$

Asíntota horizontal.

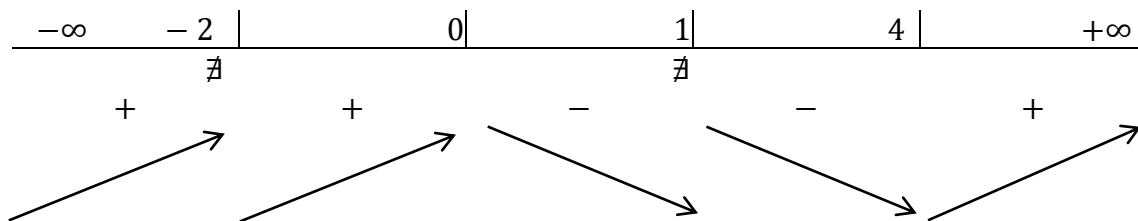
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 + x - 2} = 3 \rightarrow y = 3$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3(-1000)^2}{(-1000)^2 + (-1000) - 2} = 3^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3(-1000)^2}{(-1000)^2 + (-1000) - 2} = 3^- \end{cases}$$

5. Monotonía.

$$f'(x) = \frac{6x \cdot (x^2 + x - 2) - 3x^2 \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{3x^2 - 12x}{(x^2 + x - 2)^2} \rightarrow$$

$$3x^2 - 12x = 0 \rightarrow x(3x - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$



La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (4, +\infty)$ y decrece en $(0, 1) \cup (1, 4)$

6. Extremos relativos.

Hay un máximo en $x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2}{0^2 + 0 - 2} = 0 \rightarrow (0, 0)$

Hay un mínimo en $x = 4 \rightarrow f(4) = \frac{3 \cdot 4^2}{4^2 + 4 - 2} = \frac{24}{9} \rightarrow \left(4, \frac{24}{9}\right)$

7. Curvatura.

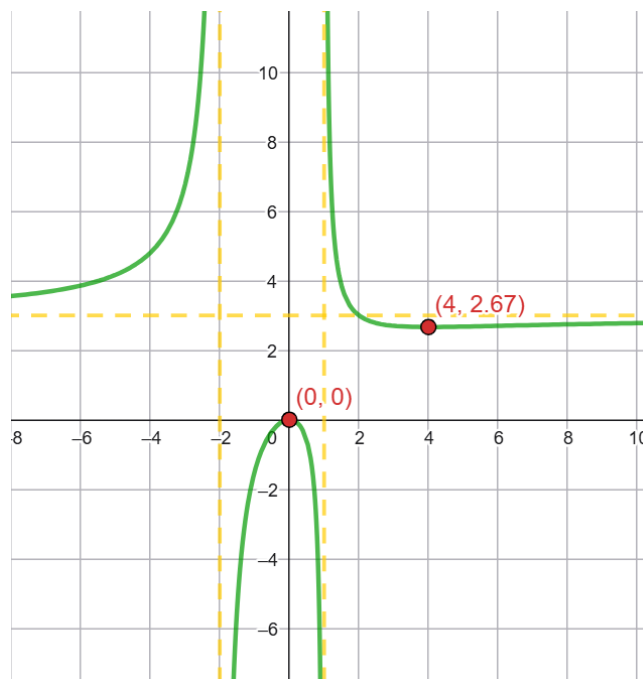
$$f'(x) = \frac{3x^2 - 12x}{(x^2 + x - 2)^2} \rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(6x - 12) \cdot (x^2 + x - 2)^2 - (3x^2 - 12x) \cdot 2 \cdot (x^2 + x - 2) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^4}$$

En este caso el estudio de la curvatura resulta muy complejo.

8. Punto de inflexión. No se estudia debido a la complejidad de la segunda derivada.

9. Representación:



S4. Ejercicios: pág. 76, ej. 11 b, c, 12 a, c. (pág. 84, ej. 52 f, 53 a, c, d, f, 55 a-d, 58 a, c, d)

Ejemplo 2: Representa la siguiente función racional

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x - 2}$$

1. Dominio.

$$2x - 2 = 0 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom}f = \mathbb{R} - \{1\}$$

2. Cortes con los ejes.

Corte con el eje OY:

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{0^2 + 3}{2 \cdot 0 - 2} = \frac{3}{-2} \rightarrow \left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

Corte con el eje OX:

$$y = 0 \rightarrow \frac{x^2 + 3}{2x - 2} = 0 \rightarrow x^2 + 3 = 0 \rightarrow x^2 = -3 \rightarrow x = \sqrt{-3} \nrightarrow$$

No corta al eje OX

3. Simetría.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 3}{2(-x) - 2} = \frac{x^2 + 3}{-2x - 2} \rightarrow \text{No es simétrica.}$$

4. Asíntotas.

Asíntotas verticales. Posible asíntota vertical en $x = 1 \rightarrow$ Estudiamos continuidad

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1^2 + 3}{2 \cdot 1 - 2} = \frac{4}{0} \rightarrow \text{Discontinua de salto infinito}$$

$$AV: x = 1 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{0,9^2 + 3}{2 \cdot 0,9 - 2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1,1^2 + 3}{2 \cdot 1,1 - 2} = +\infty \end{cases}$$

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{2x - 2} = \infty \rightarrow \text{No hay}$$

Asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 + 3}{2x^2 - 2x} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{2x - 2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3 - x(x - 1)}{2(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3 - x^2 + x}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{2x - 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La ecuación de la asíntota oblicua es $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

5. Monotonía.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (2x - 2) - 2 \cdot (x^2 + 3)}{(2x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 6}{(2x - 2)^2} \rightarrow$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$-\infty \quad -1 \quad | \quad 1 \quad | \quad 3 \quad | \quad +\infty$
 $\quad \quad \quad + \quad \quad \quad - \quad \quad \quad - \quad \quad \quad +$
 $\quad \quad \quad \nearrow \quad \quad \searrow \quad \quad \searrow \quad \quad \nearrow$

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1) \cup (1, 3)$

6. Extremos relativos.

Hay un máximo en $x = -1 \rightarrow f(-1) = \frac{(-1)^2 + 3}{2 \cdot (-1) - 2} = -1 \rightarrow (-1, -1)$

Hay un mínimo en $x = 3 \rightarrow f(3) = \frac{3^2 + 3}{2 \cdot 3 - 2} = 3 \rightarrow (3, 3)$

7. Curvatura.

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6}{(2x - 2)^2} \rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(4x - 4) \cdot (2x - 2)^2 - (2x^2 - 4x - 6) \cdot 2 \cdot (2x - 2) \cdot 2}{(2x - 2)^4}$$

$$= \frac{(4x - 4) \cdot (2x - 2) - (2x^2 - 4x - 6) \cdot 4}{(2x - 2)^3}$$

$$= \frac{8x^2 - 8x + 8 - 8x^2 + 16x + 24}{(2x - 2)^3} = \frac{32}{(2x - 2)^3}$$

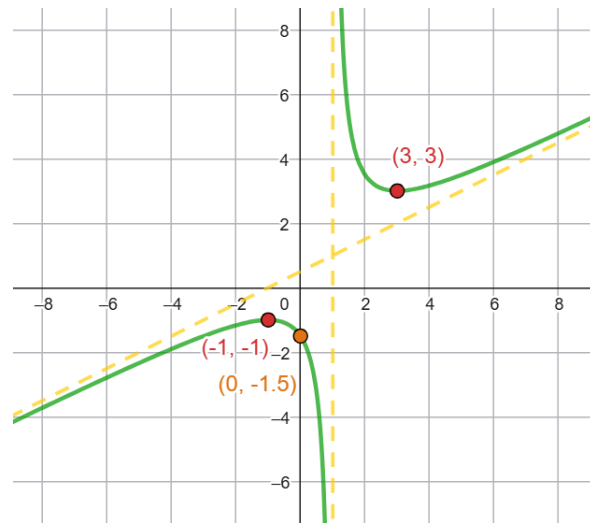
$$\rightarrow \frac{32}{(2x - 2)^3} = 0 \rightarrow f''(x) \neq 0$$

$-\infty \quad \quad \quad 1 \quad | \quad \quad \quad \infty$
 $\quad \quad \quad - \quad \quad \quad \quad \quad +$
 $\quad \quad \quad \cap \quad \quad \quad \cup$

La función es convexa en $(-\infty, 1)$ y cóncava en $(1, +\infty)$

8. Punto de inflexión. No hay. $f''(x) \neq 0$

9. Representación:



S5. Ejercicios: pág. 76, ej. 11 a, d, 12 b, d. (pág. 84, ej. 52 a-d, 53 b, 55 e-f, 58 a, c, d)

4 FUNCIONES ESPECIALES

Ejemplo 1: Representa la siguiente función racional

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

1. Dominio.

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom}f = \mathbb{R} - \{1\}$$

2. Cortes con los ejes.

Corte con el eje OY:

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{e^0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow (0, -1)$$

Corte con el eje OX:

$$y = 0 \rightarrow \frac{e^x}{x-1} = 0 \rightarrow e^x = 0 \rightarrow x = \ln 0 \nexists \text{ No corta con el eje OX}$$

3. Simetría.

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x-1} \rightarrow \text{No es simétrica.}$$

4. Asíntotas.

Asíntotas verticales. Posible asíntota vertical en $x = 1 \rightarrow$ Estudiamos continuidad

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{e^1}{1-1} = \frac{e}{0} \rightarrow \text{Discontinua de salto infinito}$$

$$AV: x = 1 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{e^{0,9}}{0,9 - 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{e^{1,1}}{1,1 - 1} = +\infty \end{cases}$$

Asíntota horizontal.

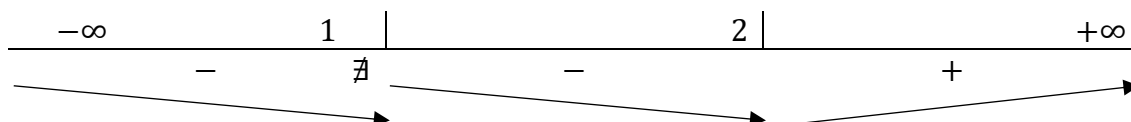
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(-x-1)} = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{e^{-100}}{-100 - 1} = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{e^{1000}}{1000 - 1} = 0^+ \end{cases}$$

5. Monotonía.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x \cdot (x-2)}{(x-1)^2} \rightarrow \frac{e^x \cdot (x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

$$e^x \cdot (x-2) = 0 \rightarrow (x-2) = 0 \rightarrow x = 2$$



La función crece en $(+2, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$

6. Extremos relativos.

$$\text{Hay un mínimo en } x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{e^2}{2-1} = e^2 \rightarrow (2, e^2)$$

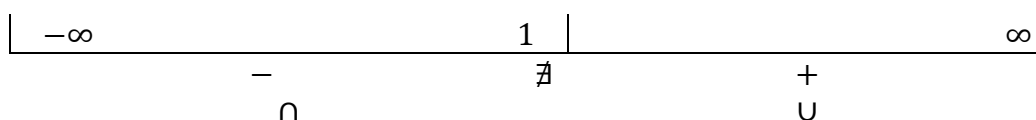
7. Curvatura.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x-2)}{(x-1)^2} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[e^x \cdot (x-2) + e^x] \cdot (x-1)^2 - e^x \cdot (x-2) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{[e^x x - e^x] \cdot (x-1) - e^x \cdot (x-2) \cdot 2}{(x-1)^3} \\ &= \frac{e^x x^2 - e^x x - e^x x + e^x - 2e^x x + 4e^x}{(x-1)^3} = \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow e^x(x^2 - 4x + 5) = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow$$

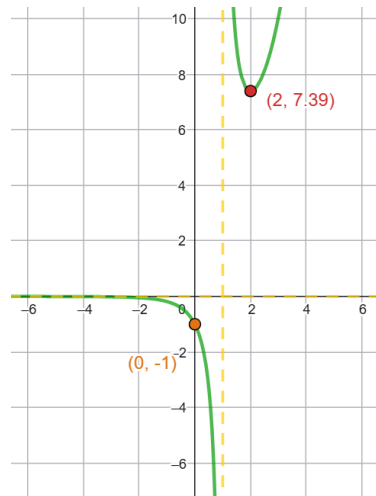
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow \nexists$$



La función es convexa en $(-\infty, 1)$ y cóncava en $(1, +\infty)$

8. Punto de inflexión. No hay. $f''(x) \neq 0$

9. Representación:



Ejemplo 2: Representa la siguiente función racional

$$f(x) = \ln(x^2 + e)$$

1. Dominio.

$$x^2 + e = 0 \rightarrow x^2 = -e \rightarrow x = \sqrt{-e} \rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R}$$

$-\infty$

+

$+\infty$

2. Cortes con los ejes.

Corte con el eje OY:

$$x = 0 \rightarrow y = \ln e = 1 \rightarrow (0, 1)$$

Corte con el eje OX:

$$y = 0 \rightarrow \ln(x^2 + e) = 0 \rightarrow x^2 + e = 1 \rightarrow x^2 = 1 - e \rightarrow x = \sqrt{1 - e} \nexists \text{ No corta con el eje OX}$$

3. Simetría.

$$f(-x) = \ln((-x)^2 + e) = \ln(x^2 + e) \rightarrow \text{Simétrica respecto al eje Y.}$$

4. Asíntotas.

Asíntotas verticales. No tiene asíntotas verticales

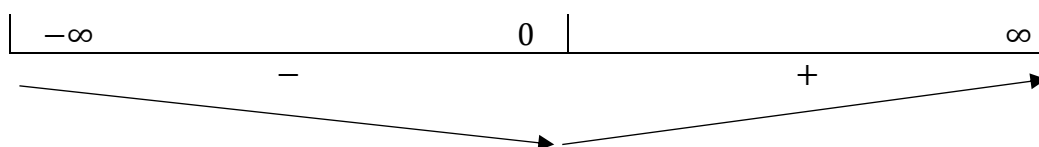
Asíntota horizontal. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + e) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + e) = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$$\text{Asíntota oblicua. } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x^2 + e)}{x} = 0$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x^2 + e) - 0) = +\infty \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + e) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + e) = -\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota oblicua.}$$

5. Monotonía.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + e} \rightarrow \frac{2x}{x^2 + e} = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$



La función crece en $(0, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 0)$

6. Extremos relativos.

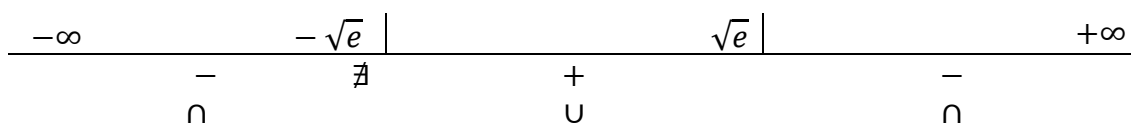
Hay un mínimo en $x \Rightarrow f(0) = \ln(0^2 + e) = \ln e = 1 \rightarrow (0, 1)$

7. Curvatura.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + e} \rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + e) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + e)^2} = \frac{2x^2 + 2e - 4x^2}{(x^2 + e)^2} = \frac{2e - 2x^2}{(x^2 + e)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{2e - 2x^2}{(x^2 + e)^2} = 0 \rightarrow 2e - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = e \rightarrow x = \pm\sqrt{e}$$



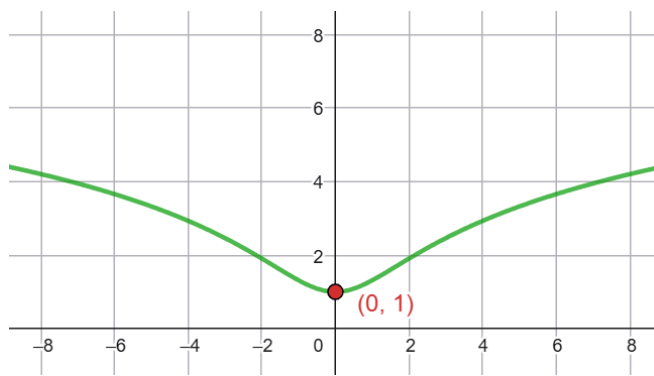
La función es convexa en $(-\infty, -\sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, +\infty)$ y cóncava en $(-\sqrt{e}, \sqrt{e})$

8. Punto de inflexión.

Hay un punto de inflexión en $x = -\sqrt{e} \rightarrow f(-\sqrt{e}) = \ln((-\sqrt{e})^2 + e) = \ln 2e \rightarrow (-\sqrt{e}, \ln 2e)$

Hay un punto de inflexión en $x = \sqrt{e} \rightarrow f(\sqrt{e}) = \ln((\sqrt{e})^2 + e) = \ln 2e \rightarrow (\sqrt{e}, \ln 2e)$

9. Representación:



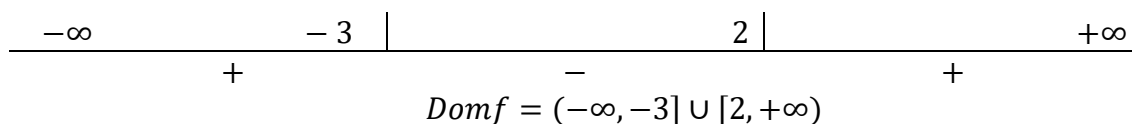
S6. Ejercicios: pág. 78, ej. 13 a, d, 14 a, b.

Ejemplo 3: Representa la siguiente función racional

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$$

1. Dominio.

$$x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow$$



2. Cortes con los ejes.

Corte con el eje OY:

$$x = 0 \rightarrow y = \sqrt{0^2 + 0 - 6} = \sqrt{-6} \nrightarrow \text{No corta con OY}$$

Corte con el eje OX:

$$y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 + x - 6} = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow (-3, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$$

3. Simetría.

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - x - 6} = \sqrt{x^2 - x - 6} \rightarrow \text{No es simétrica.}$$

4. Asíntotas.

Asíntotas verticales. No hay asíntotas verticales.

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 6} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x - 6} = +\infty \rightarrow \text{No hay asíntota horizontal.}$$

Asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + x - 6}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 6} - x) = \infty - \infty \text{ Indet}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 6} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + x - 6} + x)}{(\sqrt{x^2 + x - 6} + x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 6 - x^2}{(\sqrt{x^2 + x - 6} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 6}{(\sqrt{x^2 + x - 6} + x)} = \frac{1}{2} \rightarrow y = x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{-x} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x - 6} - x) = \infty - \infty \text{ Indet}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 6} - x) \cdot (\sqrt{x^2 - x - 6} + x)}{(\sqrt{x^2 - x - 6} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 6 - x^2}{(\sqrt{x^2 + x - 6} + x)}$$

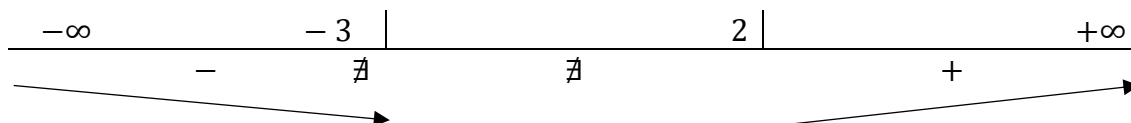
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 6}{(\sqrt{x^2 + x - 6} + x)} = \frac{-1}{2} \rightarrow y = -x - \frac{1}{2}$$

5. Monotonía.

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 6}} \rightarrow \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 6}} = 0 \rightarrow 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \notin \text{Dom}f$$

$$e^x \cdot (x - 2) = 0 \rightarrow (x - 2) = 0 \rightarrow x = 2$$



La función crece en $(+2, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, -3)$

6. Extremos relativos. No hay.

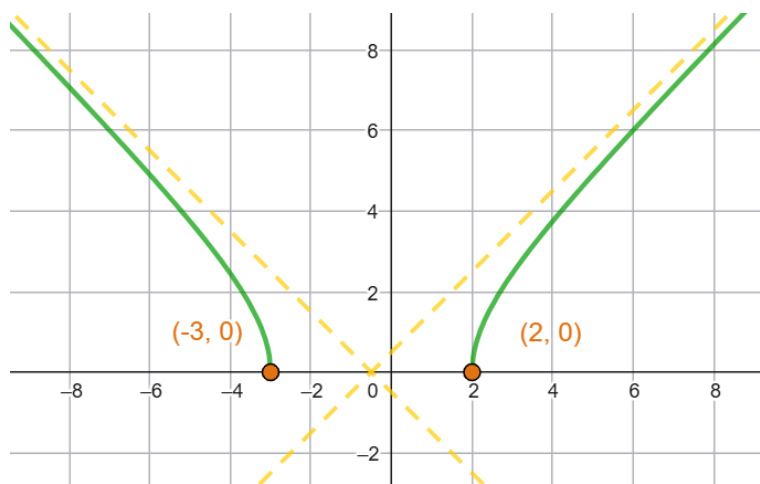
7. Curvatura.

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 6}}$$

En este caso el estudio de la curvatura resulta muy complejo.

8. Punto de inflexión.

9. Representación:



Ejemplo 4: Representa la siguiente función racional

$$f(x) = x \cdot |x - 5|$$

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (x - 5) & x - 5 \geq 0 \\ x \cdot (-x - 5) & x - 5 < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 5 \\ -x^2 + 5x & x < 5 \end{cases}$$

1. Dominio. $Dom f = \mathbb{R}$

2. Cortes con los ejes.

Corte con el eje OY:

$$x = 0 \rightarrow y = -0^2 + 5 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0,0)$$

Corte con el eje OX:

$$y = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 < 5 \\ x = 5 \rightarrow (5,0) \end{cases} \\ -x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(-x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x = 5 \end{cases} \end{cases}$$

3. Simetría.

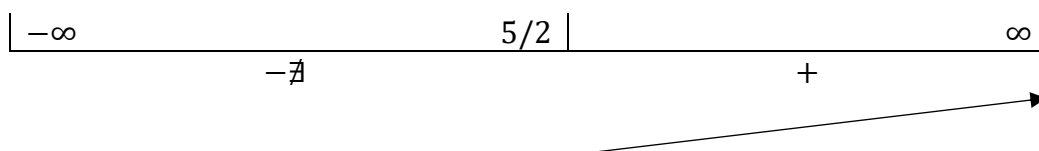
$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2 - 5(-x) = x^2 + 5x \rightarrow \text{No simétrica} \\ -(-x)^2 + 5(-x) = -x^2 - 5x \rightarrow \text{No simétrica} \end{cases} \rightarrow \text{No es simétrica.}$$

4. Asíntotas. No hay por tratarse en ambos casos de funciones polinómicas.

5. Monotonía.

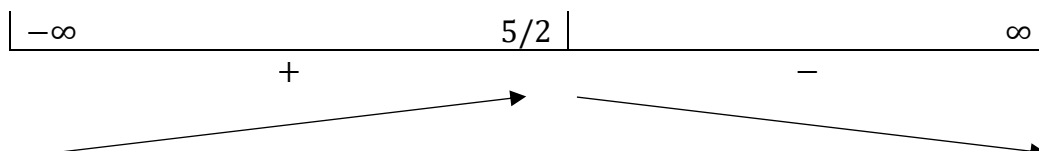
1r Tramo

$$f'(x) = -2x + 5 \rightarrow -2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$



2o Tramo

$$f'(x) = 2x - 5 \rightarrow 2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$



La función crece en $(-\infty, 5/2) \cup (5, +\infty)$ y decrece en $(\frac{5}{2}, 5)$

6. Extremos relativos.

$$\text{Hay un máximo en } x = \frac{5}{2} \rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} \rightarrow \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

7. Curvatura.

1r Tramo

$$f''(x) = -2 \rightarrow f''(x) \neq 0$$

$$\left| \begin{array}{cc} 5 & +\infty \end{array} \right|$$

—
∩

2o Tramo

$$f''(x) = 2 \rightarrow f''(x) \neq 0$$

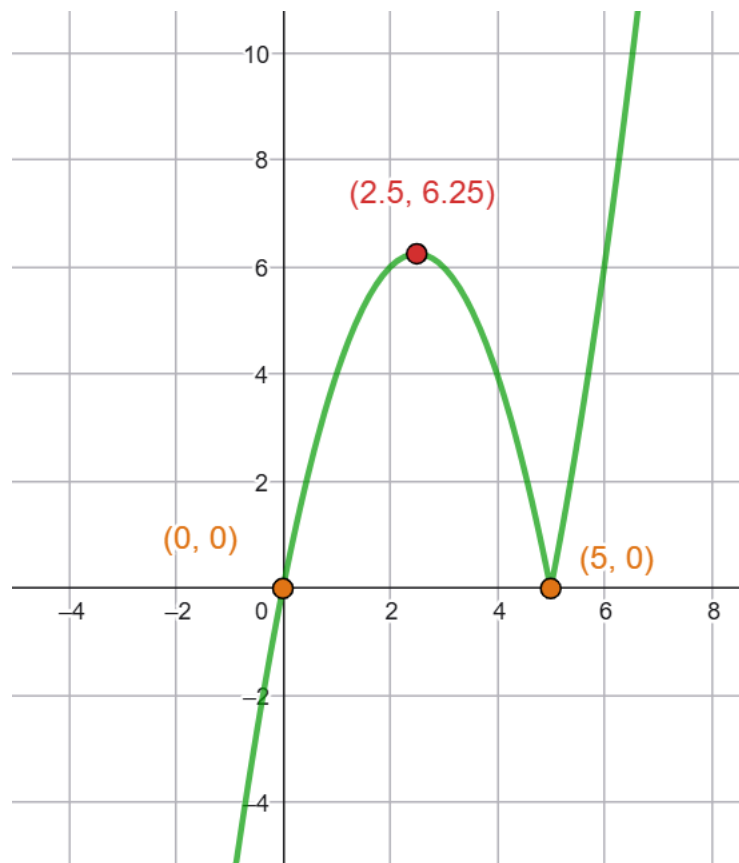
$$\left| \begin{array}{cc} -\infty & 5 \end{array} \right|$$

+
∪

La función es convexa en $(5, +\infty)$ y cóncava en $(-\infty, 5)$

8. Punto de inflexión. No hay. $f''(x) \neq 0$

9. Representación:



S7. Ejercicios: pág. 78, ej. 13 b; pág. 85, ej. 66 d, 70 a.