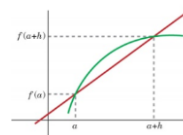


TEMA 2. DERIVADAS. APLICACIONES

1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Se llama **TASA DE VARIACIÓN MEDIA (TVM)** de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, a + h]$ al cociente:

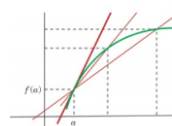
$$TVM_{[a, a+h]} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$



La tasa de variación media representa la **pendiente de la recta secante**.

Si reducimos la amplitud del intervalo $[a, a + h]$ al punto $x = a$ obtenemos la **DERIVADA DE LA FUNCIÓN EN EL PUNTO $x = a$** .

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Cuando el límite no existe decimos que la función no es derivable en ese punto.

La derivada de una función en un punto representa la **pendiente de la recta tangente** a la función en dicho punto. (*Geogebra*)

Ejemplo: Calcula la derivada de la función $f(x) = x^2 + 2x$ en $x = 1$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 + 2 \cdot (1+h)] - [1^2 + 2 \cdot 1]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+4) = 4 \end{aligned}$$

2. FUNCIÓN DERIVADA

Se llama **FUNCIÓN DERIVADA**, $f'(x)$, a la función que asocia a cada x la derivada en ese valor:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo: Calcula la función derivada de $f(x) = 3x^2 - 7x + 13$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)^2 - 7(x+h) + 13] - [3x^2 - 7x + 13]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 7x - 7h + 13 - 3x^2 + 7x - 13}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 - 7h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h - 7)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h - 7 = 6x - 7 \end{aligned}$$

S1. Ejercicios: pág. 35, ej. 1, 2; pág. 36, ej. 4, 5; pág. 64, ej. 13. (pág. 58, ej. 32, 35)

3. REGLAS DE DERIVACIÓN

Aplicando la definición de derivada podemos obtener un catálogo de derivadas de funciones elementales para no tener que estar continuamente calculando límites, estas son las **REGLAS DE DERIVACIÓN**.

- a. $f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$
- b. $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
- c. $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- d. $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- e. $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- f. $f(x) = k \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = k \cdot u'(x)$
- g. $f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- h. $f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
- i. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
- j. $f(x) = [u(x)]^n \rightarrow f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} u'(x)$
- k. $f(x) = \sqrt{u(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
- l. $f(x) = \text{sen}(u(x)) \rightarrow f'(x) = \cos(u(x)) \cdot u'(x)$
- m. $f(x) = \cos(u(x)) \rightarrow f'(x) = -\text{sen}(u(x)) \cdot u'(x)$
- n. $f(x) = \text{tg}(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$
- o. $f(x) = \text{arc sen}(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
- p. $f(x) = \text{arc cos}(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
- q. $f(x) = \text{arc tg}(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
- r. $f(x) = e^{u(x)} \rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
- s. $f(x) = a^{u(x)} \rightarrow f'(x) = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$
- t. $f(x) = \ln(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- u. $f(x) = \log_a(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x) \cdot \ln a}$

Ejemplos:

- a. $f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = 0$
- b. $f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 1 = 3$
- c. $f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^3$
- d. $f(x) = 7x^2 \rightarrow f'(x) = 7 \cdot 2 \cdot x = 14x$
- e. $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x + 1 \rightarrow f'(x) = 9x^2 - 10x + 7$
- f. $f(x) = (3x^2 + 2x - 3)^3 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot (3x^2 + 2x - 3)^2 \cdot (6x + 2)$
- g. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3} \rightarrow f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3}}$
- h. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2x)$
- i. $f(x) = (3x - 5) \cdot \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = 3\sqrt[3]{x} + (3x - 5) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- j. $f(x) = \frac{3x+1}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2-2x \cdot (3x+1)}{x^4} = \frac{3x^2-6x^2-2x}{x^4} = \frac{-3x^2-2x}{x^4} = \frac{-3x-2}{x^3}$
- k. $f(x) = \text{sen}(x^2 + 5x - 1) \rightarrow f'(x) = \cos(x^2 + 5x - 1) \cdot (2x + 5)$
- l. $f(x) = \cos\sqrt{x^2 + 5x - 1} \rightarrow f'(x) = -\text{sen}\sqrt{x^2 + 5x - 1} \cdot \frac{-1 \cdot (2x+5)}{2\sqrt{x^2+5x-1}}$
- m. $f(x) = \text{tg}(x^3 + 1) \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{\cos^2(x^3+1)}$
- n. $f(x) = \text{sen}^3(2x - 1) \rightarrow f'(x) = 3 \cdot \text{sen}^2(2x - 1) \cdot \cos(2x - 1) \cdot 2 = 6 \cdot \text{sen}^2(2x - 1) \cdot \cos(2x - 1)$
- o. $f(x) = \text{arc cos } \sqrt{2x + 3} \rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{\sqrt{1-(\sqrt{2x+3})^2}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2x+3}}}{\sqrt{2x-2}} = \frac{-1}{\sqrt{2x-2} \cdot \sqrt{2x+3}} = \frac{-1}{\sqrt{4x^2+2x-6}}$
- p. $f(x) = \text{arc sen } x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
- q. $f(x) = \text{arc tg } \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2+1}$
- r. $f(x) = e^{x^2+3x} \rightarrow f'(x) = e^{x^2+3x} \cdot (2x + 3)$
- s. $f(x) = 3^{\sqrt{x}} \rightarrow f'(x) = 3^{\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- t. $f(x) = \ln(x^3 - 5x^2) \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2-5x}{x^3-5x^2}$
- u. $f(x) = \log_3(8x^5) \rightarrow f'(x) = \frac{40x^4}{8x^5 \cdot \ln 3}$

S2. Ejercicios: pág. 40, ej. 6, 7; pág. 58, ej. 38, 39.

***pág. 58, ej. 38 d, g, h, i; 39 h**

3.1 DERIVACIÓN DE LOGARÍTMOS

Al derivar logaritmos, aplicar antes sus propiedades simplifica la expresión y hace la derivada mucho más fácil.

Ejemplos: Calcula las derivadas de las siguientes funciones aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \log \sqrt[3]{3x+1} = \frac{1}{3} \log(3x+1) \\ f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(3x+1) \cdot \ln 10} = \frac{1}{(3x+1) \cdot \ln 10} \\ \text{b) } f(x) &= \ln \frac{(3-x)^2}{e^x} = 2 \ln(3-x) - \ln e^x = 2 \ln(3-x) - x \\ f'(x) &= 2 \cdot \frac{-1}{3-x} - 1 = \frac{-2}{3-x} - 1 = \frac{-2-3+x}{3-x} = \frac{x-5}{3-x} \end{aligned}$$

3.2 DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Cuando tenemos una función exponencial-potencial $f(x)^{g(x)}$ recurrimos a los logaritmos para derivarla:

1º Aplicamos logaritmos a ambos lados y utilizamos sus propiedades.

2º Derivamos ambos miembros.

3º Aislamos la derivada.

Ejemplo: Calcula la derivada de $f(x) = (x^2 + 3x)^{tgx}$

1º Aplicamos logaritmos y utilizamos sus propiedades.

$$\ln f(x) = \ln(x^2 + 3x)^{tgx} \rightarrow \ln f(x) = tgx \cdot \ln(x^2 + 3x)$$

2º Derivamos ambos miembros.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln(x^2 + 3x) + tgx \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

3º Aislamos la derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot \left[\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln(x^2 + 3x) + tgx \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} \right] \\ f'(x) &= (x^2 + 3x)^{tgx} \cdot \left[\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln(x^2 + 3x) + tgx \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} \right] \end{aligned}$$

S3. Ejercicios: pág. 58, ej. 40, 44, 45. (pág. 40, ej. 8; pág. 41, ej. 9, 10)

4. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Se dice que una función $f(x)$ es derivable en $x = a$ si existe $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y es finito.

Es decir, si $f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a^+)$ y el resultado es un valor finito.

- Si la función es derivable entonces es continua.
- La continuidad no conlleva necesariamente la derivabilidad.

Ejemplo 1: Estudia la derivabilidad de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + 2, & x \leq 2 \\ 8x - 10, & x > 2 \end{cases}$$

1º Estudiamos la continuidad.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2 - 4x + 2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (8x - 10) = 8 \cdot 2 - 10 = 6 \\ f(2) &= 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = 6 \end{aligned} \right\}$$

$\rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \rightarrow$ La función es continua en $x = 2$.

2º Estudiamos la derivabilidad.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 6x - 4, & x \leq 2 \\ 8, & x > 2 \end{cases} \\ f'(2^-) &= 6 \cdot 2 - 4 = 8 \\ f'(2^+) &= 8 \end{aligned} \right\} \rightarrow \exists f'(2) = 8$$

S4. Ejercicios: pág. 43, ej. 11, 12, 13; pág. 59, ej. 46 (pág. 63, ej. 1)

***pág. 43, ej. 12**

Ejemplo 2: Determina los valores de a y b para que la función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2, & x \leq 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

1º Justificamos su continuidad.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx + 2) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = a + b + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} \right) = a\sqrt{1} - \frac{b}{1^2} = a - b \\ f(1) &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = a + b + 2 \end{aligned} \right\}$$

La función será continua si $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \rightarrow a + b + 2 = a - b \rightarrow 2b = -2 \rightarrow$

$$b = -1$$

2º Justificamos derivabilidad sustituyendo el valor de $b = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - x + 2, & x \leq 1 \\ a\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax - 1, & x \leq 1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 2 \cdot a \cdot 1 - 1 = 2a - 1 \\ f'(1^+) &= \frac{a}{2\sqrt{1}} - \frac{2}{1^3} = \frac{a}{2} - 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Si } 2a - 1 = \frac{a}{2} - 2 \rightarrow \exists f'(1)$$

$$2a - 1 = \frac{a}{2} - 2 \rightarrow 4a - 2 = a - 4 \rightarrow 3a = -2 \rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

S5. Ejercicios: pág. 43, ej. 14; pág. 59, ej. 47, 50, 51 (pág. 65, ej. 18)

5. RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL

La derivada en un punto $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto. Por tanto, la recta tangente en $x = a$ tendrá pendiente $m = f'(a)$ y pasará por el punto $(a, f(a))$.

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

La **recta tangente** a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

La recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente. Por tanto, su pendiente será $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{f'(a)}$

ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL

La **recta normal** a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

Ejemplo 1: Halla las rectas tangentes a $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ que son paralelas a $r: 3x - y + 5 = 0$

Al ser paralelas tendrán la misma pendiente

$$r: 3x - y + 5 = 0 \rightarrow y = 3x + 5 \rightarrow m = 3$$

Además, la pendiente de la recta tangente es $f'(x) \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$

$$3x^2 - 2x + 2 = 3 \rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6}$$
$$= \begin{cases} x = 1 \rightarrow f'(1) = 3 \\ x = -\frac{1}{3} \rightarrow f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \end{cases}$$

Falta calcular

$$f(1) = 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{22}{27}$$

La recta tangente cuando $x = 1 \rightarrow y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow y - 2 = 3 \cdot (x - 1) \rightarrow$

$$y - 2 = 3x - 3 \rightarrow y = 3x - 1$$

La recta tangente cuando $x = -\frac{1}{3} \rightarrow y - f\left(-\frac{1}{3}\right) = f'\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) \rightarrow$

$$y - \frac{22}{27} = 3 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \rightarrow y - \frac{22}{27} = 3x + 1 \rightarrow y = 3x + \frac{49}{27}$$

S6. Ejercicios: pág. 44, ej. 15, 16; pág. 59, ej. 53, 55, 56. (p. 63, ej. 3; p. 64, ej. 14, 17; p. 65, ej. 26)

Ejemplo 2:

- a) Encuentra las dos rectas tangentes a $f(x) = x^2 - 4x$ que pasan por el punto $A(1, -7)$.
- b) Esas rectas forman un triángulo con el eje de abscisas. Determina el área de dicho triángulo.

- a) $f'(x) = 2x - 4 \rightarrow$ Las rectas tangentes en $x = a$ serán de la forma:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \rightarrow y - (a^2 - 4a) = (2a - 4) \cdot (x - a)$$

Como además $A(1, -7)$ pertenece a las rectas cumplirá la ecuación:

$$\begin{aligned} -7 - (a^2 - 4a) &= (2a - 4) \cdot (1 - a) \rightarrow -7 - a^2 + 4a = 2a - 2a^2 - 4 + 4a \\ \rightarrow a^2 - 2a - 3 &= 0 \rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

La recta tangente cuando $a = 3$ será:

$$y - (3^2 - 4 \cdot 3) = (2 \cdot 3 - 4) \cdot (x - 3) \rightarrow y + 3 = 2 \cdot (x - 3) \rightarrow y = 2x - 9$$

La recta tangente cuando $a = -1$ será:

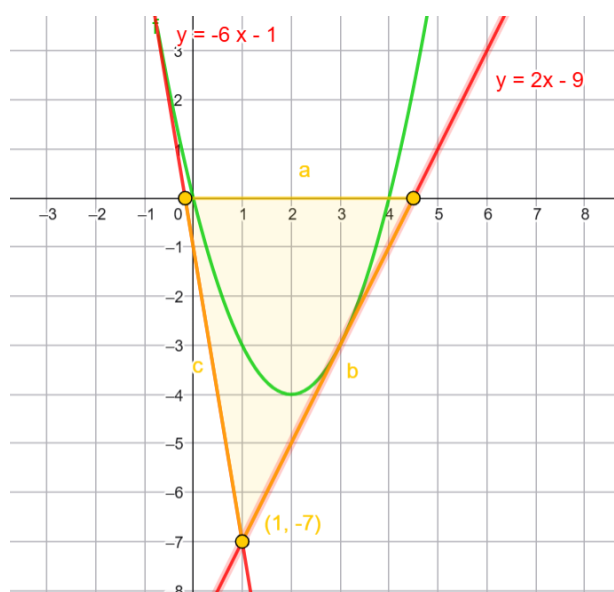
$$\begin{aligned} y - ((-1)^2 - 4 \cdot (-1)) &= (2 \cdot (-1) - 4) \cdot (x - (-1)) \rightarrow \\ y - 5 &= -6 \cdot (x + 1) \rightarrow y = -6x - 1 \end{aligned}$$

- b) Calculamos los puntos de corte con OY:

$$y = 0 \rightarrow 0 = 2x - 9 \rightarrow x = \frac{9}{2} \rightarrow \left(\frac{9}{2}, 0\right)$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = -6x - 1 \rightarrow x = -\frac{1}{6} \rightarrow \left(-\frac{1}{6}, 0\right)$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow b = \frac{9}{2} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{14}{3}; h = 7 \rightarrow A = \frac{\frac{14}{3} \cdot 7}{2} = \frac{49}{3}$$

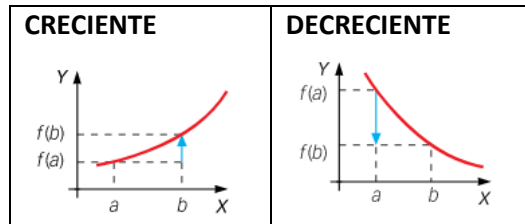


S7. Ejercicios: pág. 59, ej. 60, 61, 62, 63. (p. 63, ej. 3, 7)

6. APLICACIONES DE LA DERIVADA

6.1 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

- Si $f'(x_0) > 0 \rightarrow$ la función es **CRECIENTE** en $x = x_0$.
- Si $f'(x_0) < 0 \rightarrow$ la función es **DECRECIENTE** en $x = x_0$.



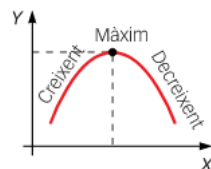
Consecuentemente:

- Si $f'(x) > 0 \forall x \in [a, b] \rightarrow$ la función es **CRECIENTE** en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0 \forall x \in [a, b] \rightarrow$ la función es **DECRECIENTE** en $[a, b]$.

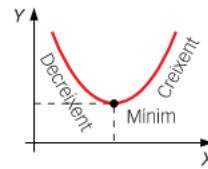
6.2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

- Si $f'(a) = 0 \rightarrow$ Hay un **MÁXIMO** o **MÍNIMO RELATIVO** en $x = a$.

MÁXIMO RELATIVO



MÍNIMO RELATIVO



Salvo raras excepciones, se tratará de un **MÁXIMO/MÍNIMO ABSOLUTO**.

- Si $f(x) < f(a) \forall x \in \text{Dom}f \rightarrow$ Hay un **MÁXIMO ABSOLUTO** en $x = a$.
- Si $f(x) > f(a) \forall x \in \text{Dom}f \rightarrow$ Hay un **MÍNIMO ABSOLUTO** en $x = a$.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ calcula:

- Sus extremos relativos.
- Sus extremos absolutos en $[-3, 5]$

a) Para calcular los extremos relativos:

1º Derivamos la función.

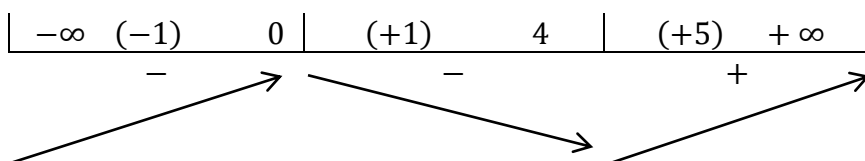
$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

2º Igualamos a cero la derivada y resolvemos la ecuación.

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \rightarrow x \cdot (3x - 12) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 12 = 0 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

3º Estudiamos el crecimiento en los diferentes intervalos sustituyendo valores en la derivada.



$$\begin{aligned} f'(-1) &= 3 \cdot (-1)^2 - 12(-1) \\ &= + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 \\ &= - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(5) &= 3 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 \\ &= + \end{aligned}$$

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$ y decrece en $(0, 4)$

4º Observamos los máximos y mínimos.

Tenemos un máximo en $x = 0 \rightarrow$ Calculamos la segunda coordenada sustituyendo

$$x = 0 \text{ en la función original} \rightarrow f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 1 = 1 \rightarrow \text{Máximo relativo}(0, 1)$$

Tenemos un mínimo en $x = 4 \rightarrow$ Calculamos la segunda coordenada sustituyendo

$$x = 4 \text{ en la función original} \rightarrow f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 1 = -31 \rightarrow \text{Mínimo relativo}(4, -31)$$

- b) Para calcular los extremos absolutos debemos calcular los valores que toma la función en los extremos del intervalo $[-3, 5]$.

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 + 1 = -80 < f(4) = -31 \\ &\rightarrow \text{Mínimo absoluto } (-3, -80) \end{aligned}$$

$$f(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 1 = -24 < f(0) = 1 \rightarrow \text{Máximo absoluto } (0, 1)$$

S8. Ejercicios: pág. 46, ej. 17, 18; pág. 60, ej. 64, 65; (pág. 63, ej. 4, 6, 8

Ejemplo 2: Hallar los coeficientes a, b, c de la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ sabiendo que la ecuación a la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$ es paralela a $y = x$ y tiene un extremo relativo en $(1, 4)$.

Como la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$ es paralela a $y = x \rightarrow f'(0) = 1$

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f'(0) = c \rightarrow c = 1$$

Como tiene un extremo relativo en $(1, 4) \rightarrow f'(1) = 0, f(1) = 4$

$$f'(1) = 0 \rightarrow f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + 1 = 0$$

$$\rightarrow 4 + 3a + 2b + 1 = 0 \rightarrow 3a + 2b = -5$$

$$f(1) = 4 \rightarrow f(1) = 1^4 + a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 = 4 \rightarrow$$

$$1 + a + b + 1 = 4 \rightarrow a + b = 2$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} 3a + 2b = -5 \\ a + b = 2 \end{array} \right\} &\rightarrow \left. \begin{array}{l} 3a + 2b = -5 \\ -3a - 3b = -6 \end{array} \right\} \rightarrow -b = -11 \rightarrow b = 11 \\ &\rightarrow a + 11 = 2 \rightarrow a = -9 \end{aligned}$$

S9. Ejercicios: pág. 60, ej. 66, **67**, 68, 73; pág. 61, ej. 78.

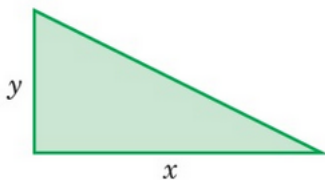
7. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

OPTIMIZAR una función consiste en maximizarla o minimizarla.

- 1º Definimos con precisión las variables implicadas.
- 2º Expresamos la función que queremos optimizar.
- 3º Expresamos en forma de ecuación la relación entre ambas variables.
- 4º Despejamos una de las variables en función de la otra y sustituimos en la función.
- 5º Derivamos la función e igualamos a cero para obtener los puntos extremos.
- 6º Confirmamos que se cumplen las condiciones del problema.

Ejemplo: Encuentra las dimensiones del triángulo rectángulo de área máxima del que sabemos que la suma de los catetos es 12 cm.

- 1º Representamos el problema.



- 2º Obtenemos la función del área del triángulo (función a optimizar).

$$f(x, y) = \frac{x \cdot y}{2}$$

- 3º Expresamos la relación entre ambas variables:

$$x + y = 12$$

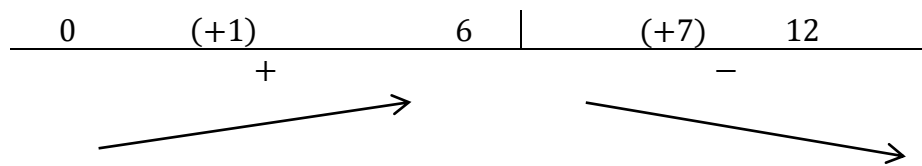
- 4º Despejamos una de las variables en función de la otra y sustituimos en la función.

$$x + y = 12 \rightarrow y = 12 - x \rightarrow f(x) = \frac{x \cdot (12 - x)}{2} = \frac{12x - x^2}{2} = 6x - \frac{x^2}{2}$$

- 5º Derivamos la función e igualamos a cero para obtener los puntos extremos.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 - \frac{2x \cdot 2 - x^2 \cdot 0}{4} = 6 - \frac{4x}{4} = 6 - x \\ 6 - x &= 0 \rightarrow x = 6 \end{aligned}$$

6º Estudiamos el signo de los intervalos:



Por tanto, en $x = 6$ hay un máximo.

$$y = 12 - x \rightarrow y = 12 - 6 \rightarrow$$

Por tanto, el triángulo será un triángulo isósceles de 6 cm cada cateto.

S10. Ejercicios: pág. 48, ej. 20, 21, 22, 23.

S11. Ejercicios: pág. 61, ej. 82, 83, 84, 85, 86 (pág. 63, ej. 2; pág. 65, ej. 24, 28, 29, 31).

8. REGLA DE L'HÔPITAL

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Ejemplo: Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{x - 3} = \frac{2^3 - 8}{3 - 3} = \frac{0}{0} \text{ Indet} \rightarrow L'H = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x \cdot \ln 2}{1} = 8 \ln 2$$

S12. Ejercicios: pág. 51, ej. 28, 29; pág. 62, ej. 100 (pág. 63, ej. 5; pág. 64, ej. 15, 19, 22; pág. 65, ej. 23, 27, 33).

S13. Ejercicios: Repaso.