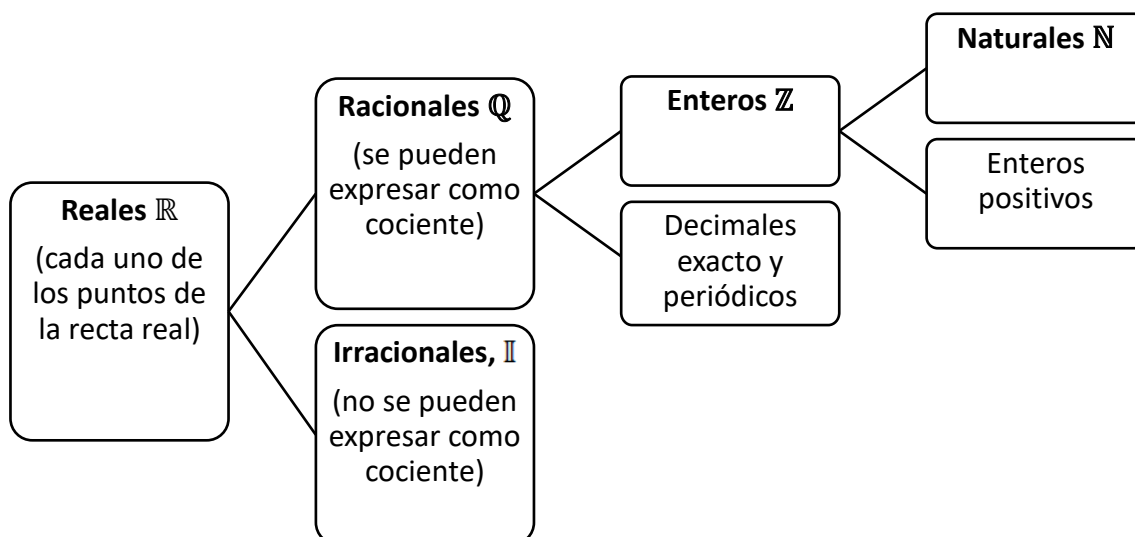


TEMA 1. NÚMEROS REALES

1. NÚMEROS REALES



Ejemplos: Clasifica los siguientes números:

$$5,87; 4; -3; 0; \pi; \frac{24}{6}; \frac{1}{2}; \sqrt{3}; 3,1\hat{2}; \phi$$

2. RADICALES

Se llama RAÍZ N-ÉSIMA $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$.

a es el radicando y n el índice

- Si $a < 0$, solo existen las raíces de índice impar.
- Si $a > 0$, las raíces de índice par tienen dos soluciones, una positiva y una negativa.

Ejemplos:

a. $\sqrt{4} = \pm 2$

c. $\sqrt[3]{8} = 2$

b. $\sqrt{-4} = \text{No té solució}$

d. $\sqrt[3]{-8} = -2$

2.1 FORMA EXPONENCIAL DE LOS RADICALES

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo: $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}$

2.2 POTENCIA DE UN RADICAL

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{m \cdot p}}$$

Ejemplo: $\left(\sqrt{2^3}\right)^3 = \sqrt{2^9}$

2.3 RAÍZ DE UN RADICAL

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo: $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$

Ejemplos Expresa en forma exponencial:

- a. $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{5}{6}}$
- b. $\left(\sqrt[6]{y^2}\right)^3 = \sqrt[6]{y^6} = y^{\frac{6}{6}} = y$
- c. $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{1}{x^{2/5}} = x^{-2/5}$
- d. $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$
- e. $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$
- f. $\left(\sqrt[6]{27}\right)^2 = \left(\sqrt[6]{3^3}\right)^2 = \sqrt[6]{3^6} = 3^{\frac{6}{6}} = 3$

Ejemplos: Expresa la potencia en forma de raíz:

- a. $3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4}$
- b. $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$
- c. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

2.4 PRODUCTO Y COCIENTE DE RADICALES

Para MULTIPLICAR Y DIVIDIR radical es necesario tener el mismo índice. Para conseguir el mismo índice calculamos el mínimo común múltiplo de los índices y reducimos a igual índice.

Ejemplos:

- a. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{27 \cdot 4} = \sqrt[6]{108}$
- b. $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{32}} = \frac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{\sqrt[6]{2^8}}{\sqrt[6]{2^5}} = \sqrt[6]{\frac{2^8}{2^5}} = \sqrt[6]{2^3}$

S1. Ejercicios: pág. 28, ej. 45, 46, 49 abcd, 50; pág.19, ej. 22 (pág. 14, ej. 18, 19, 20).

2.5 EXTRACCIÓN DE FACTORES FUERA DE UNA RAÍZ

Ejemplo: Sacamos del radical los factores que sean:

$$\sqrt[3]{48a^5b^3} =$$

1º Factorizamos

$$= \sqrt[3]{2^4 \cdot 3 \cdot a^5 \cdot b^3}$$

2º Agrupamos haciendo grupos de tantos elementos como indica el índice

$$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^3}$$

3º Por cada grupo completo extraemos fuera un factor

$$= 2ab\sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot a^2} = 2ab\sqrt[3]{6a^2}$$

2.6 SUMA Y RESTA DE RADICALES

Solo Podemos SUMAR y RESTAR radicales idénticos, con el mismo radicando y índice. Para conseguir radicando idéntico tenemos que sacar todos los factores que podamos fuera de la raíz.

Ejemplo 1: Calcula $\sqrt{32} + 2\sqrt{18} - 3\sqrt{50} =$

1º Factorizamos los radicandos

$$= \sqrt{2^5} + 2\sqrt{3^2 \cdot 2} - 3\sqrt{5^2 \cdot 2}$$

2º Sacamos fuera los factores que podamos

$$= 2^2\sqrt{2} + 2 \cdot 3\sqrt{2} - 3 \cdot 5\sqrt{2}$$

3º Multiplicamos los factores de fuera de las raíces

$$= 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 15\sqrt{2}$$

4º Sumamos/restamos los factores de fuera de las raíces $= -5\sqrt{2}$

Ejemplo 2: Calcula $\sqrt{\frac{8}{36}} - \sqrt{\frac{18}{25}} + \sqrt{50} = \sqrt{\frac{2^3}{2^2 \cdot 3^2}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^2}} + \sqrt{2 \cdot 5^2} =$

$$= \frac{2}{2 \cdot 3}\sqrt{2} - \frac{3}{5}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{3}{5}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \left(\frac{5}{15} - \frac{9}{15} + \frac{75}{15}\right)\sqrt{2} = \frac{71}{15}\sqrt{2}$$

S2. Ejercicios: pág. 28, ej. 47, 52; pág. 19, ej. 23.

2.7 RACIONALIZACIÓN

RACIONALIZAR es el proceso por el cual hace desaparecer los radicales del denominador.

CASO 1. RAÍCES CUADRADAS.

Multiplicamos el numerador y el denominador por la raíz del denominador.

Ejemplo: Racionaliza

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

CASO 2. OTRAS RAÍCES

Multiplicamos el numerador y el denominador por una raíz que complete el índice de la raíz inicial.

Ejemplo: Racionaliza

$$\frac{3}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3}} = \frac{3\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{3\sqrt[5]{7^3}}{7}$$

CASO 3. SUMA Y RESTA DE RAÍCES

Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo: Racionaliza

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

S3. Ejercicios: pág. 19, ej. 25, 26; pág. 28, ej. 53, 54.

2.8 OPERACIONES COMBINADAS

Ejemplos: Calcula

a. $(4\sqrt{3} - \sqrt{7})^2 - 2(5\sqrt{3} + 1) = (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 - 10\sqrt{3} - 2 =$
 $16 \cdot 3 - 8\sqrt{3} + 7 - 10\sqrt{3} - 2 = 61 - 18\sqrt{3}$

b. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} +$
 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

S4. Ejercicios: pág. 28, ej. 55, 57; (pág. 19, ej. 27).

3. LOGARÍTMOS

Se llama LOGARÍTMO en base a de P , $\log_a P$, al exponente que se debe elevar la base para obtener P .

$$\log_a P = x \leftrightarrow a^x = P$$

Logaritmo decimal: $\log P = \log_{10} P$

Logaritmo neperiano $\ln P = \ln_e P$

Ejemplos:

a. $\log_5 125 = x \quad 5^x = 125 = 5^3 \quad x = 3$

b. $\log_2 \frac{1}{64} = x \quad 2^x = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6} \quad x = -6$

c. $\log_5 0,04 = x$

$$5^x = 0,04 = 4 \cdot 10^{-2} = 2^2 \cdot (2 \cdot 5)^{-2} = 2^2 \cdot 2^{-2} \cdot 5^{-2} = 5^{-2} \quad x = -2$$

d. $\log_x 81 = 4 \quad x^4 = 81 = 3^4 \quad x = 4$

e. $\log_x \sqrt{5} = \frac{1}{2} \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \quad x = 5$

S5. Ejercicios: pág. 29, ej. 58, 59, 61.

3.1 PROPIEDADES DE LOS LOGARÍTMOS

1. $\log_a a = 1$

2. $\log_a 1 = 0$

3. $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$

4. $\log_a \left(\frac{P}{Q} \right) = \log_a P - \log_a Q$

5. $\log_a P^k = k \log_a P$

6. $\log_a \sqrt[k]{P} = \frac{1}{k} \log_a P$

Ejemplo 1: Calcula aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned}\log_5 250 + \frac{1}{2} \log_5 100 - 2 \log_5 2 \\&= \log_5 250 + \log_5 \sqrt{100} - \log_5 2^2 = \log_5 250 + \log_5 10 - \log_5 4 \\&= \log_5 (250 \cdot 10) - \log_5 4 = \log_5 2500 - \log_5 4 = \log_5 \frac{2500}{4} \\&= \log_5 625 = \log_5 5^4 = 4\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Expresa como un solo logaritmo:

$$\begin{aligned}2 + 3 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 y &= 2 \cdot \log_5 5 + 3 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 y = \log_5 5^2 + \log_5 x^3 - \log_5 \sqrt{y} \\&= \log_5 25 + \log_5 x^3 - \log_5 \sqrt{y} = \log_5 25 \cdot x^3 - \log_5 \sqrt{y} = \log_5 \frac{25x^3}{\sqrt{y}}\end{aligned}$$

S6. Ejercicios: pág. 22, ej. 29; pág. 29, ej. 60, 63, 64, 66; (pág. 29, ej. 69)

Ejemplo 3. Sabiendo que $\log_2 A = 0,4$ y $\log_2 B = -0,6$, calcula $\log_2 \frac{8A^2}{\sqrt[3]{B}}$.

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{8A^2}{\sqrt[3]{B}} &= \log_2 8A^2 - \log_2 \sqrt[3]{B} = \log_2 8 + \log_2 A^2 - \log_2 \sqrt[3]{B} \\&= \log_2 2^3 + 2 \cdot \log_2 A - \frac{1}{3} \cdot \log_2 B = 3 \cdot \log_2 2 + 2 \cdot 0,4 - \frac{1}{3} \cdot (-0,6) \\&= 3 + 0,8 + 0,2 = 4\end{aligned}$$

Ejemplo 4: Sabiendo que $\log 5 = 0,699$, calcula:

- a. $\log 25 = \log 5^2 = 2 \cdot \log 5 = 2 \cdot 0,699 = 1,398$
- b. $\log 50 = \log 5 \cdot 10 = \log 5 + \log 10 = 0,699 + 1 = 1,699$
- $\log 0,05 = \log \frac{5}{100} = \log 5 - \log 100 = 0,699 - \log 10^2 = 0,699 - 2 \cdot$
- c. $\log 10 = 0,699 - 2 = -1,301$

S7. Ejercicios: pág. 22, ej. 30; pág. 29, ej. 62, 65, 67, 68, 70.

S8. Ficha Radicales

S9. Ficha Logaritmos