

MATEMÁTICAS

REPASO

1º BACHILLERATO

MATEMÁTICAS I

NOM:

GRUP:

Los ejercicios y problemas se deben hacer en una hoja aparte.

TEMA 1. NÚMEROS REALES

1. RADICALES

1. Expresa las raíces en forma exponencial y simplifica.

a. $(\sqrt[6]{25})^3$

b. $\sqrt{\sqrt[5]{81}}$

Sol. a) 5; b) $\sqrt[5]{3^2}$

2. Expresa las potencias en forma raíz.

a. $3^{2/5}$

b. $2^{-3/4}$

Sol. a) $\sqrt[5]{9}$; b) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

3. Extrae del radical los factores que sean posibles.

a. $\sqrt[3]{320 \cdot n^3 \cdot m^5}$

b. $\sqrt{\frac{12 \cdot a^3}{45 \cdot b^2}}$

Sol. a) $4nm\sqrt[3]{5m^2}$; b) $\frac{2a}{3b}\sqrt{\frac{3a}{5}}$

4. Multiplica/divide las raíces y simplifica los resultados.

a. $\sqrt[4]{25 \cdot x^2 \cdot y^3} \cdot \sqrt[6]{125 \cdot x^5}$

b. $\frac{\sqrt[3]{8 \cdot a^3 \cdot b}}{\sqrt[4]{4a^2}}$

c. $\sqrt{4 \cdot m^3} \cdot \sqrt[12]{18 \cdot n^5} \cdot \sqrt[3]{10 \cdot n^3 \cdot m}$

d. $\frac{\sqrt[3]{12 \cdot x^3 \cdot y^3}}{\sqrt{9 \cdot x^2 \cdot y}}$

Sol. a) $5x^{12}\sqrt{x^4y^9}$; b) $\sqrt[6]{2^3a^3b^2}$; c) $2mn^{12}\sqrt{2^3 \cdot 5^4 \cdot 3^2 \cdot m^{10} \cdot n^5}$; d) $\sqrt[6]{\frac{2^4y^3}{3^4}}$

5. Efectúa las operaciones.

a. $2\sqrt{45} - \sqrt{125} - 3\sqrt{20}$

b. $\sqrt{\frac{12}{81}} + \sqrt{\frac{75}{100}} - \sqrt{\frac{27}{36}}$

c. $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27}$

d. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}$

e. $\sqrt{\frac{8}{9}} + \sqrt{\frac{18}{25}} - \sqrt{\frac{32}{100}}$

f. $(\sqrt{10} - \sqrt[3]{25})(\sqrt{10} + \sqrt[3]{25})$

g. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

h. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

i. $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Sol. a) $-5\sqrt{5}$; *b)* $\frac{2}{9}\sqrt{3}$; *c)* $-8\sqrt{3}$; *d)* $6\sqrt[3]{2}$; *e)* $\frac{13}{15}\sqrt{2}$; *f)* $10 - \sqrt[3]{5^4}$; *g)* $13\sqrt{6} - 30$; *h)* $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; *i)* $\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

6. Racionaliza.

a. $\frac{5}{2 \cdot \sqrt[5]{27}}$

d. $\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$

b. $\frac{-3}{2+\sqrt{7}}$

e. $\frac{3}{\sqrt[3]{36}}$

c. $\frac{5}{4\sqrt{3}}$

f. $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

Sol. a) $\frac{5\sqrt[5]{3^2}}{6}$; *b)* $2 - \sqrt{7}$; *c)* $\frac{5\sqrt{3}}{12}$; *d)* $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$; *e)* $\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$; *f)* $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

2. LOGARÍTMOS

1. Utiliza la definición y calcula los siguientes logaritmos:

a. $\log_3 9$

e. $\log_2 \sqrt{2}$

b. $\log_3 81$

f. $\log_{10} 1000$

c. $\log_3 1/9$

g. $\log_2 \sqrt{8}$

d. $\log_4 64$

h. $\log_4 1/16$

Sol. a) 2; b) 4; c) -2; d) 3; e) $\frac{1}{2}$; f) 3; g) $\frac{3}{2}$; h) -2

2. Utiliza la definición de logaritmo y calcula el valor de x:

a. $\log_2 8 = x$

d. $\log_3 x = -2$

g. $\log_x 49 = 2$

b. $\log_2 1/8 = x$

e. $\log_3 x = 4$

h. $\log_x 8 = 3$

c. $\log 100 = x$

f. $\log_5 x = 3$

i. $\log_x 125 = -3$

Sol. a) $x = 3$; b) $x = -3$; c) $x = 2$; d) $x = \frac{1}{9}$; e) $x = 81$; f) $x = 125$; g) $x = 7$; h) $x = 2$; i) $\frac{1}{5}$

3. $6 \log 4 - \log 16 + 8 \log 5$

4. $\frac{1}{2} \log_5 100 - \log_5 0.4$

3. Resuelve las siguientes operaciones con logaritmos:

Sol. a) 2; b) 4; c) 8; d) 2

1. $\log 4 + \log 25$

2. $\log_3 54 + \log_3 12 - \log_3 8$

TEMA 2. ÁLGEBRA

1. ECUACIONES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución cuando sea necesario:

a. $x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 40x - 36 = 0$

b. $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = 0$

c. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

d. $2x^4 + 9x^2 - 68 = 0$

e. $\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$

f. $\frac{x-3}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2+x} = \frac{2-3x}{x^2-1}$

g. $\sqrt{x+4} - 7 = 0$

h. $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

i. $\sqrt{x+13} - \sqrt{x+6} = 1$

j. $\sqrt{7+2x} - \sqrt{3+x} = 1$

k. $5^{x+3} = \sqrt{125}$

l. $4^{x+3} = 8^{2-x}$

m. $3 \cdot 2^{x+2} - 5 \cdot 2^x = 56$

n. $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

o. $\log x + \log(x+3) = 2 \log(x+1)$

p. $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$

Sol. a) 2, -2, 3, -3; b) 0, 5, -4, -3; c) +1, -1, +5, -5; d) +2, -2; e) $2, -\frac{3}{7}$; f) 2, 0;
g) 45; h) 4, -3; i) 3; j) +1, -3; k) $-\frac{3}{2}$; l) 0; m) 3; n) 2, 4; o) 1; p) $3, \frac{1}{3}$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a.
$$\begin{cases} 7x - 3y + z = -11 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + 2y - z = 8 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 5 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

g.
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + 2 = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

h.
$$\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

i.
$$\begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

j.
$$\begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ \log_2 \frac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$$

k.
$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^y = 5 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 7 \end{cases}$$

*Sol. a) $x = 0, y = 3, z = -2$; b) $x = 3, y = 2, z = 2$; c) No tiene solución;
d) No tiene solución; e) $x = 3 - \lambda, y = -2 + 2\lambda, z = \lambda$;
f) $x = 5 - 5\lambda, y = -3 + 2\lambda, z = \lambda$; g) $x_1 = 2, y_1 = -1, x_2 = 3, y_2 = 1$;
h) $x = 2, y = 3$; i) $x_1 = 3, y_1 = 1, x_2 = -\frac{7}{2}, y_2 = -\frac{9}{4}$; j) $x = 4, y = 2$; k) $x = 2, y = 1$*

3. INECUACIONES

3. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas y expresa la solución en forma de intervalo:

a. $x^3 + x \leq 4x^2 - 6$

b. $x(x^2 - 4) - (x + 8)^2 + 64 > 0$

Sol. a) $[-1, 2] \cup [3, +\infty)$; b) $(-4, 0) \cup (5, +\infty)$

4. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones racionales y expresa la solución en forma de intervalo:

a. $\frac{2x+4}{x-1} \leq 0$

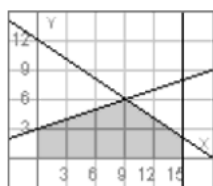
b. $\frac{4-x^2}{x^2-6x+9} \leq 0$

Sol. a) $[-2, 1)$; b) $(-2, 2)$

5. Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones, indicando claramente la región solución.

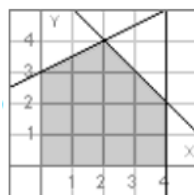
a.
$$\begin{cases} x - 3y \geq -9 \\ 2x + 3y \leq 36 \\ x \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a)



b.
$$\begin{cases} -x + 2y \leq 6 \\ x + y \leq 6 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b)



4. PROBLEMAS

6. **Mat CCSS. JULIO 2021).** Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniano, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8,50 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo de café que ha de utilizarse en la mezcla.

Sol. En la mezcla hay que utilizar un 37'5% de café colombiano, un 12'5% de café brasileño y un 50% de café keniano

- 7. (Mat CCSS. JUNIO 2021)** En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de 62000 euros. En la empresa hay trabajadores de tres categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2000 euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un 4% el salario a los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará en un 10% el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios en el próximo mes será un 2% inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa?

Sol: En la empresa hay 30 trabajadores de la categoría A, 16 de la B y 11 de la C.

- 8. (Mat CCSS. SEPTIEMBRE 2020)** Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo. Determina el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos.

Sol: las piezas producidas han sido 23 camiones, 26 marionetas y 40 rompecabezas.

- 9. (Mat CCSS. JULIO 2017)** Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas. En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda y los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y primera preguntas. ¿Cuál fue la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

Sol: en la primera pregunta obtuvo 2'5 puntos, en la segunda 2 puntos y en la tercera 3 puntos

- 10. (Mat CCSS. JUNIO 2016)** Un comerciante compró 200 kilos de melocotones, 100 de manzanas y 300 de peras. Los vende incrementando un 25% el precio de los melocotones y de las manzanas y un 40% el de las peras. Por la venta de todo el género obtuvo 1087 euros de los que 257 fueron beneficio. Sabiendo que el precio de compra del kilo de melocotones fue 50 céntimos más caro que el del kilo de peras, ¿cuál fue el precio de compra del kilo de cada una de las frutas?

Sol: el precio de compra del kilo de melocotones fue de 1,60€, el de manzanas 1,80€ y el de peras 1,10€

- 11. (Mat CCSS. JULIO 2016)** Un restaurante ofrece cada día desayunos, comidas y cenas. Los desayunos cuestan 4 euros, las comidas 8 y las

cenas 10. El último sábado se sirvieron tantas comidas como desayunos y cena juntos. La recaudación total fue de 1116 euros. La recaudación obtenida con las comidas superó a la de las cenas en 156 euros. a) ¿Cuántos desayunos, comidas y cenas se sirvieron? b) ¿Qué beneficio se obtuvo si las ganancias de un desayuno son 2,50 euros, las de una comida 4 euros y las de una cena 5 euros?

Sol: a) Se sirvieron 30 desayunos, 72 comidas y 42 cenas.;

b) Se obtuvo un beneficio de 573 €

- 12. (Mat CCSS. JUNIO 2015)** En una sucursal de una agencia de viajes se vende un total de 60 billetes de avión con destino a Londres, París y Roma. Sabiendo que el número de billetes para París es el doble de los vendidos para los otros dos destinos conjuntamente y que para Roma se emiten dos billetes más que la mitad de los vendidos para Londres, ¿cuántos billetes se han vendido para cada uno de los destinos?

Sol: se han vendido 12 billetes para Londres, 40 para París y 8 para Roma

- 13. (Mat CCSS. JULIO 2014)** Cierta persona invierte un total de 7000 € en acciones de las empresas A y B y en un depósito a 12 meses al 1 %. Pasado un año, vende sus acciones, obteniendo una rentabilidad del 5 % en las acciones de la empresa A y del 3 % en las de B. El beneficio total de sus tres inversiones es 202 €. Determina qué cantidad destinó a cada inversión si sabemos que el dinero total destinado a comprar acciones superó en 2600 € al dinero del depósito.

Sol: Destinó 1800€ a acciones de la empresa A, 3000€ a acciones de la empresa B y 2200€ en un depósito a 12 meses

TEMA 3 Y 4. TRIGONOMETRÍA

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

1. Halla las razones trigonométricas de α , sin hallar α :

- a. $\operatorname{sen} \alpha = 0,62$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
- b. $\operatorname{cos} \alpha = -0,83$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$
- c. $\operatorname{tg} \alpha = -0,92$ y $270^\circ < \alpha < 360^\circ$
- d. $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3}$ y $\operatorname{cos} \alpha < 0$
- e. $\operatorname{cos} \alpha = \frac{5}{6}$ y $\operatorname{tg} \alpha < 0$
- f. $\operatorname{tg} \alpha = 2,25$ y $\operatorname{sen} \alpha < 0$

Sol. a) $\operatorname{cos} \alpha = -0,78, \operatorname{tg} \alpha = -0,79$; b) $\operatorname{sen} \alpha = -0,56, \operatorname{tg} \alpha = 0,67$; c) $\operatorname{sen} \alpha = -0,68, \operatorname{cos} \alpha = 0,74$;

d) $\operatorname{cos} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; e) $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{5}$; f) $\operatorname{sen} \alpha = -0,9, \operatorname{cos} \alpha = -0,4$

2. Sabiendo que $\operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5}$ y $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ calcula razonadamente las siguientes razones trigonométricas sin hallar α , utilizando las relaciones trigonométricas entre los ángulos y las razones trigonométricas de 60° :

- | | |
|--|---|
| a. $\operatorname{cos} (180^\circ + \alpha)$ | f. $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)$ |
| b. $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha)$ | g. $\operatorname{sen} (60^\circ + \alpha)$ |
| c. $\operatorname{tg} (-\alpha)$ | h. $\operatorname{cos} (60^\circ - \alpha)$ |
| d. $\operatorname{cos} (360^\circ + \alpha)$ | i. $\operatorname{tg} (2\alpha)$ |
| e. $\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha)$ | j. $\operatorname{sen}(780)$ |

Sol. a) $-\frac{4}{5}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) $\frac{4}{5}$; e) $\frac{4}{5}$; f) $\frac{4}{3}$; g) $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$; h) $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$; i) $\frac{24}{7}$; j) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Triángulos rectángulos

3. Raquel ve el punto más alto de una antena bajo un ángulo de 55° . Alejándose 7 metros en línea recta, el ángulo es de 40° . ¿Cuál es la altura de la antena?

Sol. La altura de la antena es de 14,24 metros

4. Desde una torre de vigilancia de 25 m, observamos dos árboles situados en orillas opuestas de un río bajo un ángulo de 15° . Los dos árboles están alineados con el pie de la torre y la distancia de esta al río es de 50 m. Calcula la anchura del río.

Sol. 72,17 m

5. Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables que forman con el suelo ángulos de 36° y 48° . Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 90 m. Calcula la altura de la antena.

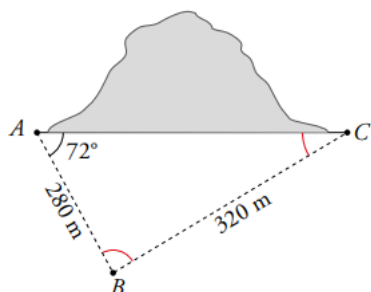
Sol. 39,64 m

6. Un faro de 20 m de altura está colocado sobre un promontorio. Un barco ve el promontorio bajo un ángulo de 15° , y el faro, bajo un ángulo de 40° . Calcula la altura del promontorio.

Sol. 7,32 m

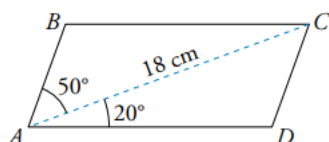
Cualquier triángulo

7. Para construir un túnel entre A y C necesitamos saber su longitud y dirección. Para ello, fijamos un punto B y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula AC y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$.



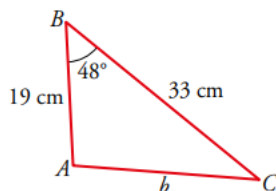
Sol. 263,96 m

8. En un paralelogramo ABCD conocemos la diagonal mayor AC = 18 cm y los ángulos que esta forma con los lados, 20° y 50° . Calcula la longitud de los lados.



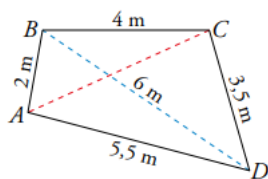
Sol. AD = 14,67 cm, CD = 6,55 cm

9. Resuelve el siguiente triángulo:



Sol. b = 24,72 cm; A = $97^\circ 7'$, C = $34^\circ 51'$

10. En un cuadrilátero ABCD conocemos las medidas de los lados y de la diagonal BD. Calcula las medidas del ángulo $\hat{B}$ y de la diagonal AC.



Sol. $\hat{B} = 100^\circ 7' 26''$; $AC = 4,78 \text{ cm}$

3. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

11. Demuestra las siguientes identidades:

a. $(\text{sen}\alpha + \text{cos}\alpha)^2 - (\text{sen}\alpha - \text{cos}\alpha)^2 = 4\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha$

b. $\text{sen}\alpha \cdot \cos^2\alpha + \text{sen}^3\alpha = \text{sen}\alpha$

c. $\frac{\text{sen}\alpha}{1+\text{cos}\alpha} + \frac{\text{sen}\alpha}{1-\text{cos}\alpha} = \frac{2}{\text{sen}\alpha}$

d. $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$

e. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

f. $\cos\alpha \cos(\alpha - \beta) + \text{sen}\alpha \text{sen}(\alpha - \beta) = \cos\beta$

g. $\frac{\cos\alpha + \text{sen}\alpha}{\cos\alpha - \text{sen}\alpha} \cdot \cos 2\alpha = 1 + \text{sen} 2\alpha$

Sol: 1) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - (\text{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 = \text{sen}^2\alpha + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - (\text{sen}^2\alpha - 2\text{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)$
 $= \text{sen}^2\alpha + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 4\text{sen}\alpha\cos\alpha$

2) $\text{sen}\alpha \cdot \cos^2\alpha + \text{sen}^3\alpha = \text{sen}\alpha(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) = \text{sen}\alpha \cdot 1 = \text{sen}\alpha$

3) $\frac{\text{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\text{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha + \text{sen}\alpha + \text{sen}\alpha\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = \frac{2\text{sen}\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2\text{sen}\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{2}{\text{sen}\alpha}$

4) $\frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\text{sen}\beta + \text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\text{sen}\beta} = \frac{2\cos\alpha\cos\beta}{2\text{sen}\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$

5) $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha - \text{sen} 2\alpha \text{sen}\alpha = (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)\cos\alpha - 2\text{sen}\alpha\cos\alpha\text{sen}\alpha = \cos^3\alpha - \text{sen}^2\alpha\cos\alpha - 2\text{sen}^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\text{sen}^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

6) $\cos\alpha \cos(\alpha - \beta) + \text{sen}\alpha \text{sen}(\alpha - \beta) = \cos\alpha(\cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta) + \text{sen}\alpha(\text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\text{sen}\beta)$
 $= \cos^2\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\cos\alpha + \text{sen}^2\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\cos\beta\cos\alpha = \cos\beta(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha)$
 $= \cos\beta$

7) $\frac{\cos\alpha + \text{sen}\alpha}{\cos\alpha - \text{sen}\alpha} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\cos\alpha + \text{sen}\alpha}{\cos\alpha - \text{sen}\alpha} (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) = \frac{\cos\alpha + \text{sen}\alpha}{\cos\alpha - \text{sen}\alpha} (\cos\alpha + \text{sen}\alpha)(\cos\alpha - \text{sen}\alpha)$
 $= (\cos\alpha + \text{sen}\alpha)(\cos\alpha + \text{sen}\alpha) = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\text{sen}\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$
 $= 1 + \text{sen} 2\alpha$

4. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $-2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = -1$

Sol. $x_1 = 30; x_2 = 150, x_3 = 270$

b. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$

Sol. $x_1 = 45; x_2 = 135; x_3 = 225; x_4 = 315$

c. $\operatorname{sen} 2x - 2\cos^2 x = 0$

Sol. $x_1 = 90; x_2 = 270; x_3 = 45; x_4 = 225$

d. $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{sen} x = 0$

$x_1 = 0; x_2 = 180; x_3 = 120; x_4 = 240$

e. $2\operatorname{sen} x - \cos^2 x = -1$

$x_1 = 0; x_2 = 180$

f. $\cos 2x - 3\operatorname{sen} x + 1 = 0$

$x_1 = 30; x_2 = 150$

g. $-3\operatorname{sen} x + \cos^2 x = 3$

$x_1 = 270$

h. $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$

$x_1 = 30; x_2 = 150$

i. $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

$x_1 = 45; x_2 = 225$

j. $2\cos x = 3 \tan x$

$x_1 = 30; x_2 = 150$

TEMA 5 Y 6. VECTORES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. PUNTOS Y VECTORES

1. Obtén un vector $\vec{u}(x, y)$ que forma un ángulo de 45° con $\vec{v} = (0, 4)$ y cuyo módulo sea igual al de $\vec{v}$.

$$\text{Sol. } \vec{u}(2\sqrt{3}, -2), \quad \vec{u}(-2\sqrt{3}, -2)$$

2. Obtén un vector $\vec{u}(x, y)$ perpendicular al vector $\vec{v} = (8, 6)$ y cuyo módulo es $|\vec{u}| = 5$.

$$\text{Sol. } \vec{u}(-3, 4), \quad \vec{u}(3, -4)$$

3. Halla las coordenadas del punto medio.

a. $A(-2, 5), B(4, 1)$

Sol. a) $M(1, 3)$; b) $M(1, -1)$

b. $A(7, -3), B(-5, 1)$

4. Halla las coordenadas del punto simétrico de A respecto de P.

a. $A(4, -1), P(-7, 2)$

Sol. a) $A'(-18, 5)$; b) $A'(8, -6)$

b. $A(2, 4), P(5, -1)$

5. Demuestra que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(7, 4)$ es isósceles.

Sol. El triángulo es isósceles ya que tiene dos lados iguales y uno desigual:

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = \sqrt{20}; \quad |\overline{AC}| = \sqrt{80}$$

6. Demuestra que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$ es rectángulo.

Sol. El triángulo es rectángulo ya que cumple el teorema de Pitágoras

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2, 29 + 29 = 58$$

2. ECUACIONES DE LA RECTA

7. Halla las ecuaciones que se indican en cada caso:

- a. Ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos:

$M(-2, 1), N(4, 5)$.

- b. Ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(7, -5)$ y tiene por vector directo $\vec{v}(7, -4)$.

- c. Ecuación continua de la recta $y = -3x + 7$.
- d. Ecuación implícita de la recta paralela a $5x - 6y + 14 = 0$ que pasa por el punto $(0, -3)$.
- e. Ecuación general de la recta que pasa por $P(-5, 3)$ y es perpendicular a la recta $4x + 2y - 7 = 0$.

$$\text{Sol. a) } (x, y) = (-2, 1) + \lambda(3, 2); b) \begin{cases} x = 2 + 7\lambda \\ y = -5 - 4\lambda \end{cases}; c) \frac{x-0}{1} = \frac{y-7}{-3}; d) y = \frac{5}{6}x - 3; e) x - 2y + 11 = 0$$

3. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

8. Posición relativa de dos rectas (si se cortan, di cuál es el punto de corte). (

a. $r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases} \quad s: x - 1 = \frac{y}{2}$

b. $r: y = 2x - 3 \quad s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

c. $r: y = \frac{5}{4}x + 2 \quad s: 5x - 4y + 8 = 0$

$$\text{Sol. a) Secantes, se cortan en el punto } \left(\frac{3}{2}, 1\right); b) \text{ Paralelas; c) Coincidentes.}$$

4. ÁNGULOS

9. Halla el ángulo que forman las rectas:

a. $r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y}{2}; \quad s: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 4 + \lambda \end{cases}$

b. $r: 3x - 5y + 7 = 0; \quad s: 10x + 6y - 3 = 0$

$$\text{Sol. a) } \alpha = 45^\circ; b) \alpha = 90^\circ$$

5. DISTANCIAS

10. Halla la distancia entre las siguientes rectas:

a. $r: 3x + 5 = 0$ $s: \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = 3 - 4\lambda \end{cases}$

b. $r: y = -\frac{2}{3}x + 1$ $s: \frac{1-x}{3} = \frac{y+1}{2}$

$$\text{Sol. a) } \text{dist}(r, s) = \frac{31}{15}; \text{ b) } \text{dist}(r, s) = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

6. PROBLEMAS

11. Calcula las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(4, -2)$, $C(2, 4)$ y halla el circuncentro.

$$\text{Sol: } x - 3y = 0; x + y = 0; x = 0; \text{Circuncentro: } (0, 0)$$

12. Calcula las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(9, 2)$, $C(3, 7)$ y halla el baricentro.

$$\text{Sol: } 3x - 4y = 0; x + 5y - 19 = 0; -4x - y + 19 = 0; \text{Baricentro: } (4, 3)$$

13. Calcula las ecuaciones de las alturas del triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$, $C(6, -3)$ y halla el ortocentro.

$$\text{Sol: } x - 5y + 7 = 0; 2x - y - 1 = 0; x + y - 3 = 0; \text{Ortocentro: } \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

TEMA 8. NÚMEROS COMPLEJOS

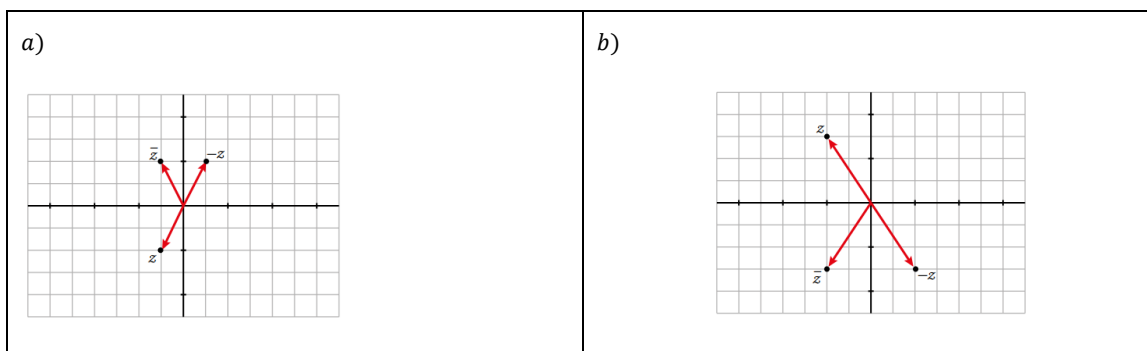
1. NÚMEROS COMPLEJOS

1. Representa gráficamente cada número complejo, su conjugado y su opuesto:

a. $-1 - 2i$

b. $-2 + 3i$

Sol.



2. Calcula el valor de x para que $z = \frac{x+2i}{5+12i}$ sea:

a. Un número real.

b. Un número imaginario puro.

Sol. a) $x = \frac{5}{6}$; b) $x = -\frac{24}{5}$

3. Calcula el valor de x para que $z = \frac{1+3xi}{3-4i}$ sea:

a. Un número real.

b. Un número imaginario puro.

Sol. a) $x = -\frac{4}{9}$; b) $x = \frac{1}{4}$

2. OPERACIONES EN FORMA BINÓMICA

4. Realiza las siguientes operaciones en forma binómica.

a. $\frac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$

d. $\frac{1+i}{2-i} + \frac{-3-2i}{1+3i}$

b. $\frac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$

e. $\frac{1-2i}{5+3i} + \left(\frac{3}{1-i}\right)^2$

c. $\frac{3-6i}{3+i} + \frac{4}{3-4i}$

f. $\frac{(1-3i)^2 - (-3+2i)(-2i)^2}{2}$

Sol. a) $3 + 6ii$; b) $\frac{9}{20} - \frac{7}{20}i$; c) $\frac{39}{50} - \frac{73}{50}i$; d) $-\frac{7}{10} + \frac{13}{10}i$; e) $-\frac{1}{34} + \frac{70}{17}i$; f) $-10 + i$

3. OPERACIONES EN FORMA POLAR

5. Realiza las siguientes operaciones en forma polar.

a. $4_{120^\circ} \cdot 3_{60^\circ}$

d. $2_{230^\circ} \cdot 3_{130^\circ}$

b. $\frac{4_{0^\circ}}{2_{180^\circ}}$

e. $\frac{3_{100^\circ}}{3_{40^\circ}}$

c. $\frac{(1_{210^\circ})^2 \cdot 3_{30^\circ}}{3_{330^\circ}}$

f. $\frac{5_{45^\circ} \cdot (2_{15^\circ})^3}{4_{90^\circ}}$

Sol. a) 12_{180° ; b) 2_{180° ; c) 1_{120° ; d) 6_{0° ; e) 1_{60° ; f) 10_{0°

6. Calcula y expresa el resultado en forma binómica.

a. $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}\right)^4$

c. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{-2+2\sqrt{3}i}\right)^5$

b. $\sqrt{\frac{2-2i}{-3+3i}}$

d. $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$

Sol. a) $-2 - 2\sqrt{3}i$; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}i, -\sqrt{\frac{2}{3}}i$; c) $\frac{\sqrt{3}}{64} + \frac{1}{64}i$; d) $i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

7. Resuelve las siguientes ecuaciones. (1.5 puntos)

a. $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$

c. $x^3 - x^2 - x - 15 = 0$

b. $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

d. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

Sol. a) $x_1 = -1, x_2 = 2 + i, x_3 = 2 - i$; b) $x_1 = 3i, x_2 = -3i, x_3 = 4, x_4 = -4$;

c) $x_1 = 3, x_2 = -1 + 2i, x_3 = -1 - 2i$; d) $x_1 = 2i, x_2 = -2i, x_3 = 3i, x_4 = -3i$

TEMA 9 Y 10. FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. FUNCIONES

1. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

e. $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 2}$

b. $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - x - 6}$

f. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

c. $f(x) = \sqrt{7 - x}$

g. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

d. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

h. $f(x) = \log(x^3 - 6x^2 + 8x)$

Sol. a) Domf = $\mathbb{R}$; b) Domf = $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$; c) Domf = $(-\infty, 7]$; d) Domf = $[-3, 3]$; e) Domf = $\mathbb{R}$; f) Domf = $\mathbb{R}$; g) Domf = $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$; h) Domf = $(0, 2) \cup (4, +\infty)$

2. Calcula els punts de tal amb els eixos de les següents funcions:

1. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

2. $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

3. $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1}$

4. $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-3}$

Sol. a) $(-1, 0), (0, 1)$; b) $(0, -5)$; c) $(0, 2), \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$; d) $(0, 5), (-5, 0), (3, 0)$

3. Estudia la simetria de les funcions:

1. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$

2. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

3. $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$

Sol. a) Parella; b) Senar; c) No simètrica

4. Obtén la expresión analítica de f o g dadas las funciones.

a. $f(x) = 5x^2 + 4$; $g(x) = \sqrt{2x + 2}$

b. $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = \frac{4}{x+1}$

Sol. a) $(f \circ g)(x) = 10x + 14$; b) $(f \circ g)(x) = \frac{12 - 4x}{(x + 1)^2}$

5. Halla la función inversa de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \sqrt[3]{4x + 5}$

b. $f(x) = 2x - 3$

Sol. a) $f^{-1}(x) = \frac{x^3 - 5}{4}$; b) $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$

2. LÍMITES GRÁFICAMENTE

1. Halla los siguientes límites, observando la gráfica de la función $f(x)$:

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

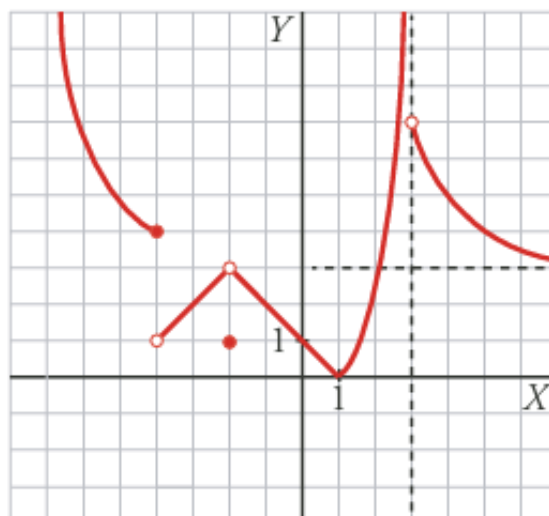
b. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

e. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



Sol. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 1$, $\nexists \lim_{x \rightarrow -4} f(x)$; c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$;

d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$; e) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 7$, $\nexists \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. Halla los siguientes límites, observando la gráfica de la función $f(x)$:

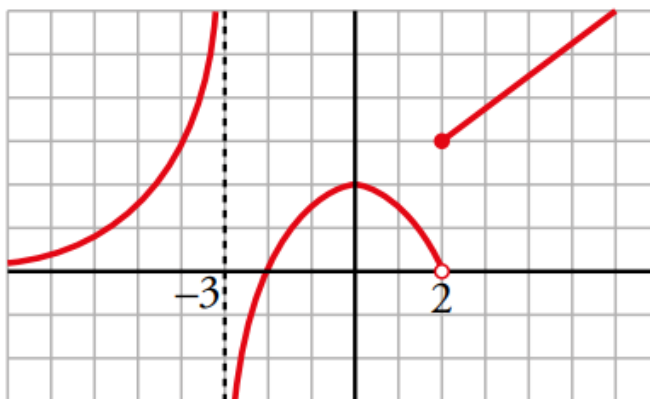
a. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



Sol. a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$, $\nexists \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$;

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$, $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. LÍMITES EN UN PUNTO

Límites de una función a trozos

3. Halla los siguientes límites de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Sol. a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$; b) $\nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$

4. Halla los siguientes límites de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Sol. a) 5; b) 4; c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

5. Halla los siguientes límites de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ 4\sqrt{x} + 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Sol. a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -4$; b) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 11$; c) 15

6. Halla los siguientes límites de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 3 & \text{si } x \neq -2 \\ 7 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Sol. a) 3 ; b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 5$; c) 15

Límites en funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$

7. Calcula los siguientes límites:

a. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15}$

d. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 5x^2}{x^2}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2 - 4}$

f. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

Sol. a) 3 ; b) $-\frac{1}{4}$; c) $-\frac{1}{4}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$;

f) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

3. LÍMITES EN EL INFINITO

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

8. Halla los siguientes límites:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-3}$

g. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-7}{4x^2+3}$

h. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x}$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2}$

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-3x}{x+3}$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^2+2x-4}$

j. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x}$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(x-1)^2}$

k. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3}}$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x}$

$$\text{l. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$$

$$\text{m. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^3+1}}$$

$$\text{n. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2-1}}$$

$$\text{o. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1}$$

$$\text{p. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-7}{4x^2+3}$$

$$\text{q. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1}$$

$$\text{r. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{(x-1)^2}$$

$$\text{s. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-12x^2}{3x^2}$$

$$\text{t. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{3-x}$$

$$\text{u. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{(2x+1)^2}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5}{1-x}$$

$$\text{w. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-x^2}{7-x^2}$$

$$\text{x. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-x^2}{7-x^2}$$

$$\text{y. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3}-2x}{x+3\sqrt{x}}$$

$$\text{z. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^3+1}}$$

$$\text{aa. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2-3}}$$

$$\text{bb. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-5}}{1-2x}$$

Sol. a) 2; b) $+\infty$; c) 0; d) 0; e) 0; f) $+\infty$; g) 2; h) $-\infty$; i) -3; j) 1; k) 0; l) $\sqrt{2}$; m) $+\infty$; n) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$;
o) $+\infty$; p) $-\infty$; q) $-\infty$; r) 3; s) -4; t) $-\infty$; u) 0; v) $+\infty$; w) $-\infty$; x) $+\infty$; y) -2;
z) $-\infty$; aa) 1; bb) $\frac{1}{2}$

Indeterminación $\infty - \infty$

9. Halla los siguientes límites:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2} \right)$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x} \right)$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2} \right)$$

$$\text{e. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{f. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^3}{x^2+1} \right)$$

$$\text{g. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})$$

$$\text{h. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^2+x})$$

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})$$

$$\text{j. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-4})$$

$$\text{k. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sqrt{x^4-1})$$

$$\text{l. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})$$

Sol. a) $-\infty$; b) 0; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) 0; f) 1; g) $\frac{1}{2}$; h) $+\infty$; i) 0; j) -1; k) $-\infty$; l) $-\frac{1}{2}$

Indeterminación 1^∞

10. Halla los siguientes límites:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x$

k. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}$

l. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{-5x}$

m. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^5$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5$

n. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$

o. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x}$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{-x}$

p. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$

g. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x}$

q. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-1}$

h. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x}$

r. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{5x}\right)^{-5x}$

s. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

j. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2}$

t. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

Sol. a) $\sqrt[5]{e}$; b) $+\infty$; c) 0; d) 1; e) e^5 ; f) $\frac{1}{e^5}$; g) $+\infty$; h) $\frac{1}{e^5}$; i) e^5 ; j) e^3 ;

k) $\frac{1}{e^2}$; l) $\sqrt[5]{e^3}$; m) 1; n) $\frac{1}{\sqrt{e^3}}$; o) e^2 ; p) e^{10} ; q) $\frac{1}{e^2}$; r) e^2 ; s) e^6 ; t) $\frac{1}{e^4}$

4. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN A TROZOS

11. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < -1 \\ x^2+3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 2^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x < 0 \\ x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} 5-x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{2}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

*Sol. a) Continua en todo su dominio; b) Discontinua evitable en $x = 1$;
c) Discontinua de salto finito en $x = 0$; d) Discontinua de salto infinito en $x = 2$;
e) Discontinua evitable en $x = 1$*

12. Halla m para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x < 3 \\ mx + 10 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Sol. $m = -2$

13. Halla m y n para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + mx + n & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ 45 - x^2 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

Sol. $m = -5, n = 3$

14. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2-3x}$

c. $f(x) = \frac{x^4-1}{x-1}$

b. $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$

d. $f(x) = \frac{x^3-4x^2+9}{x^2-9}$

Sol:

a) Discontinua de salto infinito en $x = 0$ y discontinua evitable en $x = 3$; b) Discontinua de salto infinito en $c = 1$

c) Discontinua evitable en $x = 1$;

d) Discontinua de salto infinito en $x = -3$ y discontinua evitable en $x = 3$

5. ASÍNTOTAS

15. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

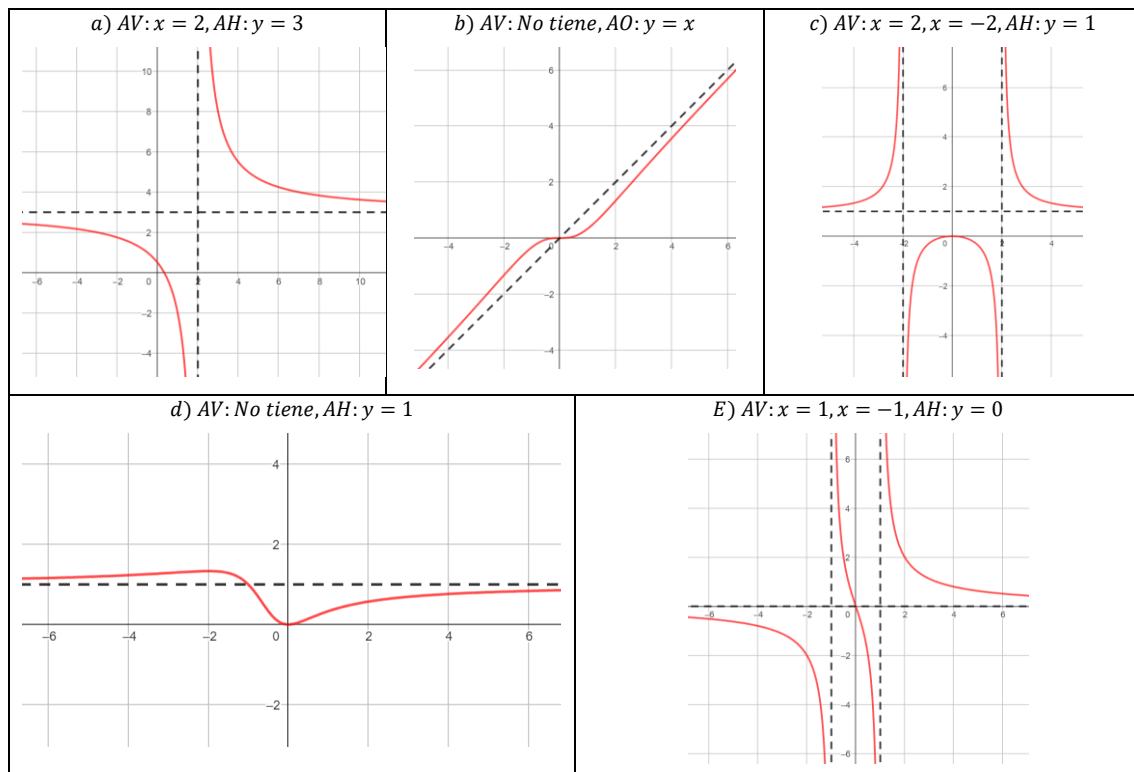
b. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2}$

c. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

d. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x+1}$

e. $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$

Sol



TEMA 11. DERIVADAS

1. REGLAS DE DERIVACIÓN

1. $f(x) = \frac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x - 7$	$f'(x) = x^2 + 14x - 4$
2. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)^5$	$f'(x) = 5 \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x)^4 \cdot (3x^2 - 6x + 2)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$	$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$ $= \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$
4. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2}$	$f'(x) = \frac{4x^2 - 6x + 5}{(x^2 + x - 2)^2}$
5. $f(x) = \ln(3x^2 - 1)$	$f'(x) = \frac{6x}{3x^2 - 1}$
6. $f(x) = \ln\sqrt{x - x^2}$	$f'(x) = \frac{1 - 2x}{2x(1 - x)}$
7. $f(x) = e^{3x^2 + 1}$	$f'(x) = 6xe^{3x^2 + 1}$
8. $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 10^{\sqrt{x}} \cdot \ln 10$
9. $f(x) = 3^{2x^2} \cdot \sqrt{x}$	$f'(x) = 4x \cdot 3^{2x^2} \cdot \ln 3 \cdot \sqrt{x} + \frac{3^{2x^2}}{2\sqrt{x}}$
10. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$	$f'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot (x - 1)}{x^3}$

11. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$	$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
12. $f(x) = \cos(7 - 2x)$	$f'(x) = 2\operatorname{sen}(7 - 2x)$
13. $f(x) = 3\operatorname{tg}(2x)$	$f'(x) = 6(1 + \operatorname{tg}^2(2x))$
14. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$	$f'(x) = \frac{-5}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$
15. $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)$	$f'(x) = \frac{3x^2-6}{(x^2+2)^2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)$
16. $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen}x$	$f'(x) = e^x \cdot (\operatorname{sen}x + \cos x)$
17. $f(x) = x^4 \cdot \cos x$	$f'(x) = 4x^3 \cos x - x^4 \operatorname{sen}x$
18. $f(x) = \ln(\operatorname{tg}(1-x))$	$f'(x) = -\frac{1 + \operatorname{tg}^2(1-x)}{\operatorname{tg}(1-x)}$
19. $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$	$f'(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \frac{x^1 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

2. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Funciones polinómicas

20. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- c) Máximos y mínimos locales.
- d) Representación gráfica.

21. Dada la función $f(x) = (x^2 + x)^2$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Los máximos y mínimos locales.
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Funciones racionales

22. Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-48}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Los máximos y mínimos locales.
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

23. Dada la función $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Los máximos y mínimos locales.
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

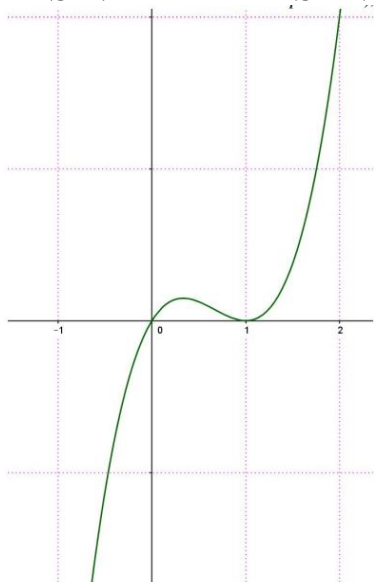
1)

a) Domf

$$= \mathbb{R}; (0,0), (1,0); b) \text{ Crece } \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$$

$$\cup (1, +\infty)$$

Decrece $\left(\frac{1}{3}, 1\right); c) \text{ Máximo } \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right), \text{ mínimo}$



2)

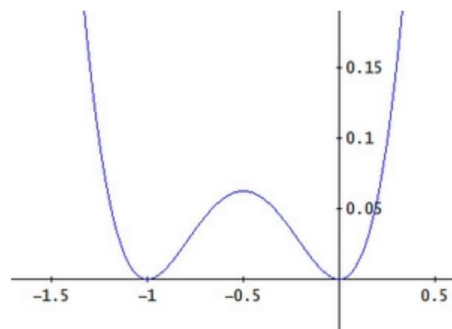
a) Dom

$$= \mathbb{R}, (-1,0), (0,0); b) \text{ Crece } \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\cup (0, \infty),$$

$$\text{Decrece } (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right);$$

c) Mínimos $(-1,0)$ y $(0,0)$ y máximo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$



3)

a) Domf

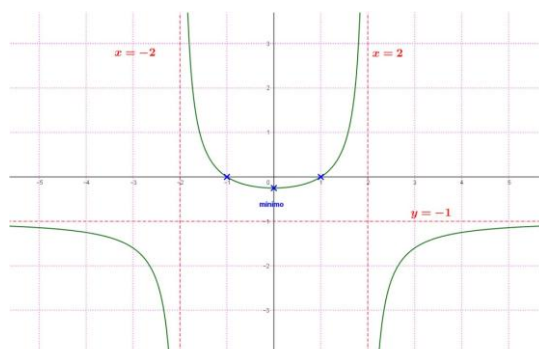
$$= \mathbb{R} - \{-2, 2\}; \left(0, -\frac{1}{4}\right), (-1,0), (1,0);$$

$$b) \text{ AH: } y = -1, \text{ AV: } x = -2, x = 2;$$

$$c) \text{ Crece } (0,2) \cup (2, +\infty),$$

$$\text{Decrece } (-\infty, -2) \cup (-2, 0);$$

$$c) \text{ Mínimo } \left(0, -\frac{1}{4}\right);$$

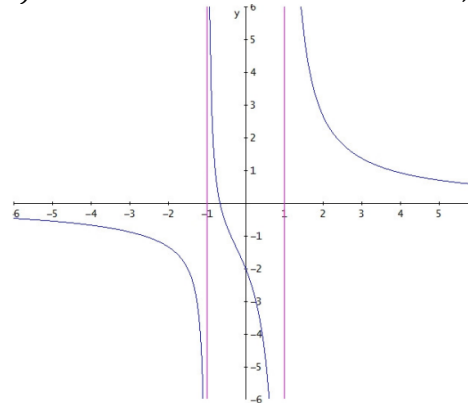


$$a) \text{ Dom} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}, (0, 2), \left(-\frac{2}{3}, 0\right);$$

$$b) \text{ AV: } x = -1, x = 1, \text{ AH: } y = 0;$$

$$d) \text{ Decrece } (-\infty, -1) \cup (1, \infty);$$

$$e) \text{ No tiene ni máximos ni mínimos};$$

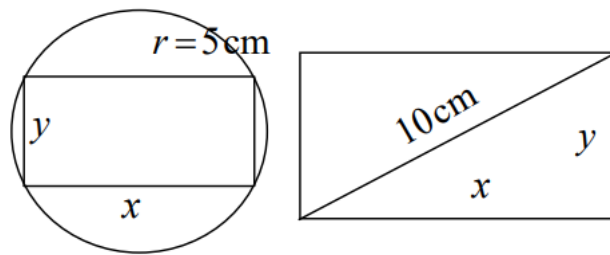


3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

- 24.** Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3600 m^2 de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.

Sol. Es un cuadrado de 60 m de lado

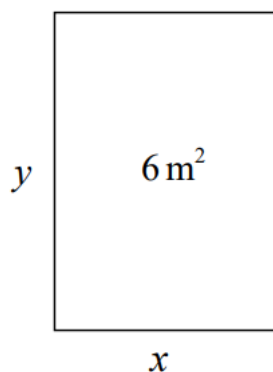
- 25.** Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 5 cm.



Sol. Es un cuadrado de $\sqrt{50}$ cm de lado

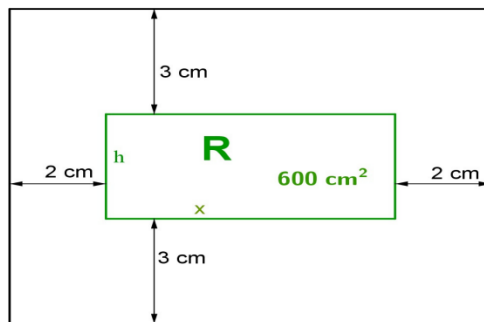
- 26.** Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros.

- Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.
- Determinar el coste del marco.



Sol. a) 3m, 2m; b) 240 euros

- 27. (EBAU Julio 2018)** Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que: por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:



- El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R.
- El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima.
- Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima.

Sol. a) $A(x) = 624 + 6x + \frac{2400}{x}$, $x > 0$; b) $x = 20 \text{ cm}$; c) 24 cm de ancho y 36 cm de alto

- 28. (EBAU Julio 2020)** En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado.
- La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.

Sol. a) $A(x) = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{2}$, $0 < x < 20$; b) Lado = $10\sqrt{2} \text{ cm}$, Área = 50 cm^2