

TEMA 9. FUNCIONES

1. FUNCIONES. DOMINIO Y RECORRIDO

Una **FUNCIÓN**, f , es una relación entre dos conjuntos que asocia a cada elemento del conjunto inicial un único elemento del conjunto final.

$$f: A \rightarrow B$$
$$a \rightarrow f(a) = b$$

Una función puede expresarse mediante una **TABLA**, una **GRÁFICA** o una **EXPRESIÓN ANALÍTICA** (fórmula).

1.1 RECORRIDO

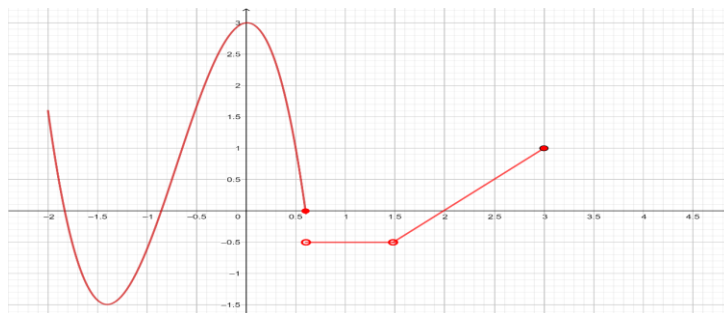
El **RECORRIDO** o **IMAGEN**, Imf , de una función es el conjunto de todos los valores de $y = f(x)$ que toma.

1.2 DOMINIO

El **DOMINIO** de una función, $Domf$, es el conjunto de valores de x para los que está definida la función.

GRAFICAMENTE:

Ejemplo: Calcula el dominio y recorrido de la función.



$$Domf = [-2, 0'5] \cup (0'5, 1'5) \cup (1'5, 3], \quad Recorregut f = [-1'5, 3]$$

ANALÍTICAMENTE

El dominio de una función es tan amplio como permita su expresión analítica.

CASOS ESPECIALES:

1. Funciones racionales.

Una fracción algebraica no existe si el denominador es cero.

Ejemplo: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x}$

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(x - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \end{cases}$$

2º El dominio serán todos los valores reales menos las soluciones de la ecuación.

$$Domf = \mathbb{R} - \{0, 5\}$$

2. Funciones irracionales

Una raíz de índice par no existe si el número de dentro es negativo.

Ejemplo 1: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

1º Igualamos el radicando a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 5 = 7$	$0^2 - 4 \cdot 0 - 5 = -5$	$6^2 - 4 \cdot 6 - 5 = 7$	
+	-	+	

3º El dominio serán los intervalos donde los valores sean positivos.

$$Domf = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$$

S1. Ejercicios: pág. 219, ej. 1, 2, 3; pág. 238, ej. 41, 42.

Ejemplo 2: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2x-5}}$

1º Hallamos los valores que anulan al numerador y al denominador.

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$2x - 5 = 0 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

	$-\infty$	-3	-3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$x + 3$	$-4 + 3 = -1 \rightarrow -$		$0 + 3 = +3 \rightarrow +$		$3 + 3 = +6 \rightarrow +$	
$2x - 5$	$2 \cdot (-4) - 5 = -13 \rightarrow -$		$2 \cdot 0 - 5 = -5 \rightarrow -$		$2 \cdot 6 - 5 = +1 \rightarrow +$	
$\frac{x + 3}{2x - 5}$	$\frac{-}{-} = +$		$\frac{+}{-} = -$		$\frac{+}{+} = +$	

3º El dominio serán los intervalos donde los valores sean positivos, sin incluir el valor que anula al denominador.

$$Domf = (-\infty, -3] \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

3. Funciones logarítmicas

No existe el logaritmo de un número negativo ni el de cero.

Ejemplo: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

1º Igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

$-\infty$	0	3	$+\infty$
$(-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 4$		$1^2 - 3 \cdot 1 = -2$	$4^2 - 3 \cdot 4 = 4$
$+$		$-$	$+$

3º El dominio serán los intervalos donde los valores sean positivos, sin incluir los extremos donde se anula.

$$Domf = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

S2. Ejercicios: pág. 238, ej. 43, 44.

2. SIMETRÍA Y PERIODICIDAD

2.1 SIMETRÍA

- Una función presenta una **SIMETRÍA PAR** o simetría respecto al eje de ordenadas si $f(-x) = f(x)$.
- Una función presenta una **SIMETRÍA IMPAR** o simetría respecto al origen de coordenadas si $f(-x) = -f(x)$.

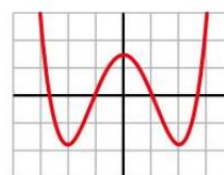
Ejemplos: Estudia las simetrías de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 7}{5}$

Calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 - 8(-x)^2 + 7}{5} = \frac{x^4 - 8x^2 + 7}{5} = f(x) \rightarrow$$

Simetría Par



b. $f(x) = x^3 - 3x$

Calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \rightarrow$$

Simetría Impar



c. $f(x) = x^5 + 2x^3 - 1$

Calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^5 + 2(-x)^3 - 1 = -x^5 - 2x^3 - 1 \rightarrow \text{No presenta simetría}$$

2.2 PERIODICIDAD

Una función es **PERIÓDICA** de periodo T si su gráfica se repite a intervalos de longitud T.

Ejemplo: Sabiendo que f es una función periódica de periodo 4, de la que conocemos los valores: $f(0) = 3, f(1) = 5, f(2) = 0, f(3) = 1$. Calcula:

a. $f(17) = f(1) = 5$

b. $f(38) = f(2) = 0$

c. $f(12) = f(0) = 3$

S3. Ejercicios: pág. 220, ej. 4, 5; pág. 238, ej. 45, 47.

3. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones, f y g se llama **FUNCIÓN COMPOSICIÓN** de, f y g y se designa $g \circ f$ a la función que transforma x en $g[f(x)]$

$$g \circ f: x \rightarrow f(x) \rightarrow g[f(x)]$$

Ejemplo: Considera las funciones

$$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = \frac{4}{x+1}$$

Obtén la expresión analítica de $g \circ f$ y $f \circ g$

$$\begin{aligned} g \circ f &= g[f(x)] = g[x^2 - x] = \frac{4}{x^2 - x + 1} \\ f \circ g &= f[g(x)] = f\left[\frac{4}{x+1}\right] = \left(\frac{4}{x+1}\right)^2 - \frac{4}{x+1} = \frac{16}{(x+1)^2} - \frac{4}{x+1} \\ &= \frac{16 - 4(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{16 - 4x - 4}{(x+1)^2} = \frac{12 - 4x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

4. FUNCIÓN INVERSA

Se llama **FUNCIÓN INVERSA** de f a otra función f^{-1} que cumple que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$$

CÁLCULO DE LA FUNCIÓN INVERSA

Ejemplo: Halla la expresión analítica de la función inversa de $f(x) = 2x - 3$

1º Llamamos $f(x) = y \rightarrow y = 2x - 3$

2º Intercambiamos las incógnitas x y y .

$$x = 2y - 3$$

3º Despejamos y .

$$x = 2y - 3 \rightarrow 2y = x + 3 \rightarrow y = \frac{x+3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

Ejemplo: Comprueba que $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ es la inversa de $f(x) = 2x - 3$

$$f^{-1} \circ f = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}[2x - 3] = \frac{2x - 3 + 3}{2} = x$$

S4. Ejercicios: pág. 232, ej. 35; pág. 233, ej.37, 38; pág. 240, ej. 66, 68, 70.

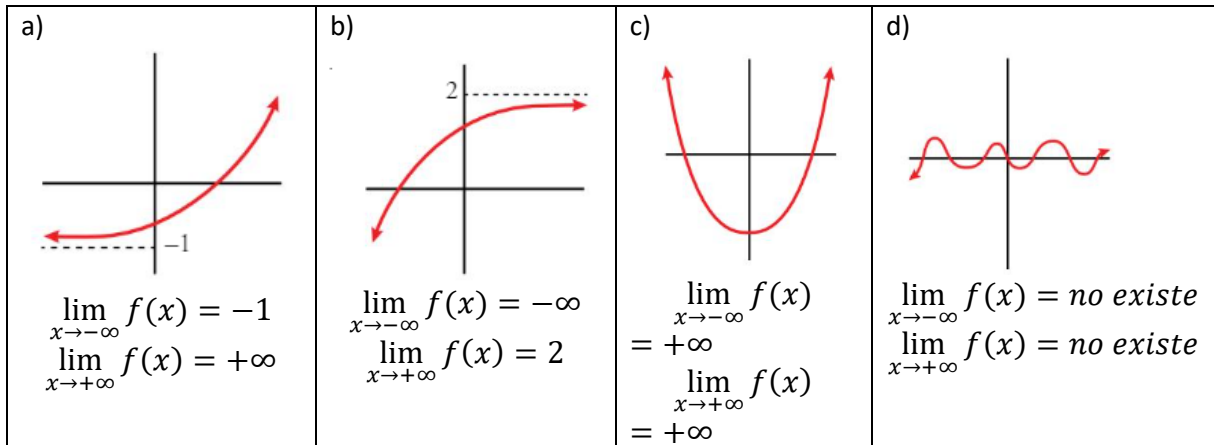
TEMA 10. LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. LÍMITES GRÁFICAMENTE

1.1 LÍMITES CUANDO $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

El **LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$** es el valor al que se aproxima la función cuando la x toma valores muy grandes ($x \rightarrow +\infty$) o muy pequeños ($x \rightarrow -\infty$).

Ejemplos:



1.2 LÍMITES CUANDO $x \rightarrow c$

El **LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO** es el valor que toma la función cuando la x se aproxima a dicho punto.

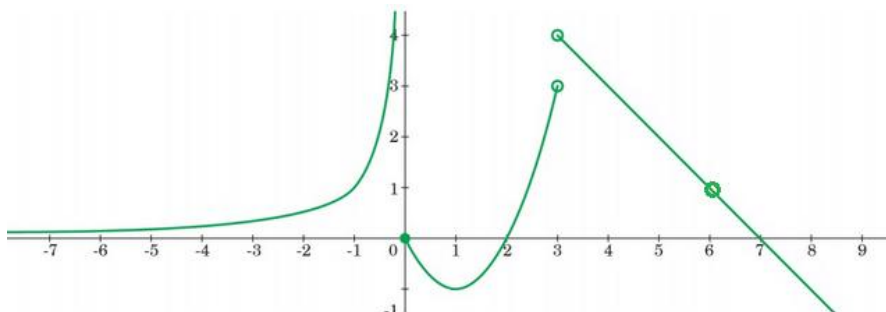
Para calcular el límite en un punto debemos calcular los límites laterales:

- Límite por la izquierda $\rightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$, es decir x se aproxima a c por la izquierda.
- Límite por la derecha $\rightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$, es decir x se aproxima a c por la derecha.

Únicamente existe límite si $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

Ejemplo: Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{cases} \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +4 \end{cases} \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 1$$

S5. Ejercicios: pág. 256, ej. 17; pág. 258, ej. 18; pág. 267, ej. 46; pág. 269, ej. 78.

2. LÍMITES CUANDO $x \rightarrow +\infty$ O $x \rightarrow -\infty$

2.1 LÍMITES DE FUNCIONES POLINÓMICAS

El límite cuando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$ de una función polinómica es siempre $+\infty$ o $-\infty$ dependiendo del término de mayor grado.

Ejemplos:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 + 3x^2 + x = 5 \cdot (+\infty)^3 = +5 \cdot +\infty = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 + 3x^2 + x = -5 \cdot (+\infty)^3 = -5 \cdot +\infty = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 + 3x^2 + x = -5 \cdot (-\infty)^3 = -5 \cdot -\infty = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 + 3x^2 + x = 5 \cdot (-\infty)^3 = +5 \cdot -\infty = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + x = +3 \cdot (-\infty)^2 = +3 \cdot +\infty = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + x = -3 \cdot (-\infty)^2 = -3 \cdot +\infty = -\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{(+\infty)^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{-x^5} = \sqrt[3]{-(+\infty)^5} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-x^5} = \sqrt[3]{-(-\infty)^5} = \sqrt[3]{-(-\infty)} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{-x^3} = \sqrt{-(+\infty)^3} = \sqrt{-(+\infty)} = \sqrt{-\infty} = \text{No existe}$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^6} = \sqrt{(-\infty)^6} = \sqrt{(+\infty)} = +\infty$

2.2 LÍMITES EN FUNCIONES RACIONALES $f(x)=P(x)/Q(x)$

CASO: $x \rightarrow +\infty$

En una función racional para calcular el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ comparamos el grado del polinomio del numerador y del denominador.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^p + \dots}{bx^q + \dots} = \begin{cases} \text{Si grado de } P > \text{grado de } Q \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} = \pm\infty \\ \text{Si grado de } P = \text{grado de } Q \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} = \frac{a}{b} \\ \text{Si grado de } P < \text{grado de } Q \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} = 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+2x-1}{10x^2+7x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{10x^2} = \frac{+}{+} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3-5x^2-1}{6x^3-7x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3}{6x^3} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x-3}{-5x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{-5x^2} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^4+5x}{6-x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^4}{-x^3} = \frac{+}{-} = -\infty$$

CASO: $x \rightarrow -\infty$

Para calcular el límite cuando $x \rightarrow -\infty$ calculamos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$

Ejemplos:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3+2x-1}{10x^2+7x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(-x)^3}{10(-x)^2} = \frac{-}{+} = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3-5x^2-1}{6x^3-7x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3(-x)^3}{6(-x)^3} = \frac{+3}{-6} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^4+5x}{6-x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10(-x)^4}{-(-x)^3} = \frac{+}{+} = +\infty$$

S6. Ejercicios: pág. 267, ej. 40 a-h, 41 a-h.

2.3 LÍMITES EN FUNCIONES $\infty - \infty$

Al restar dos expresiones infinitas obtenemos $= \infty - \infty$ **Indeterminación**

CASO 1. Raíz – raíz. Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

Ejemplo 1: Calcula

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Calcula

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x})^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

CASO 2. Fracción – Fracción. Reducimos a común denominador.

Ejemplo 1: Calcula

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 5}{2} - \frac{x^2 - 2}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (3x + 5) - 2 \cdot (x^2 - 2)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 2x^2 + 4}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{2x} = \infty\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Calcula

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^3 + 5}{x + 2} - \frac{4x^3 - x}{x - 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \frac{-4x^3 + x}{-x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-3x^3 + 5) \cdot (-x - 2) - (-4x^3 + x) \cdot (-x + 2)}{(-x + 2) \cdot (-x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 6x^3 - 5x - 10 - 4x^4 + 8x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 2x - 2x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty\end{aligned}$$

S7. Ejercicios: pág. 267, ej. 42, 45; pág. 270, ej. 8; pág. 271, ej. 14.

2.4 LÍMITES DE UNA POTENCIA

- $(+\infty)^{+\infty} = \infty$, $(+\infty)^{-\infty} = 0$
- Si $a > 0 \rightarrow (+\infty)^a = +\infty$. Si $a < 0 \rightarrow (+\infty)^a = 0$
- Si $a \neq 0 \rightarrow a^0 = 1$.
- Si $a > 1 \rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = 0 \end{cases}$
- Si $0 < a < 1 \rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = +\infty \end{cases}$
- 1^∞ $1^{-\infty}$ Indeterminación

Número e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Ejemplos: Calcula los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)^{x-3} = (+\infty)^{+\infty} = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^{x+1} = (+\infty)^{-\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 7x)^{-2} = (+\infty)^{-2} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{x}\right)^2 = (+\infty)^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^x = (+2)^{+\infty} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2+2}{x^2+x}\right)^x = (+3)^{-\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{5x^2-2}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\infty} = +\infty$

Ejemplos: Calcula los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} = e$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = e^2$

$$d. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{\frac{2}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+2}} = e^2$$

$$e. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+5}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} \rightarrow \text{Dividimos } (x+1):(x+5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+5}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-4}{x+5}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+5}{-4}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+5}{-4}}\right)^{\frac{x+5}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+5} \cdot \frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+5}{-4}}\right)^{\frac{x+5}{-4}}\right]^{\frac{-4x^2-4}{x^2+5x}} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$$

58. Ejercicios: pág. 255, ej. 13, 14; pág. 266, ej. 37, 38; pág. 267, ej. 45.

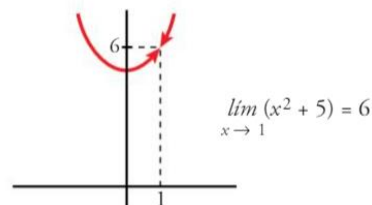
3. LÍMITES CUANDO $x \rightarrow \text{número}$

3.1 LÍMITE DE UN POLINOMIO

Para calcular el $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, sustituimos x por c y calculamos $f(c)$.

Ejemplo: Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 5) = 1^2 + 5 = 6$$



3.2 LÍMITE EN UNA FUNCIÓN "A TROZOS"

- **Caso 1. Cálculo del límite en el punto de ruptura**

Calculamos los límites laterales:

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l \rightarrow \text{No existe límite}$$

- **Caso 2. Cálculo del límite en otro punto cualquiera**

Sustituimos el punto en el trozo correspondiente.

Ejemplos: Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x < 3 \\ -x + 2 & x \geq 3 \end{cases}$$

Calcula $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$

a) Para calcular $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ necesito calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -3 + 2 = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \rightarrow$ No existe límite en $x=3$.

b) Para calcular $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ sustituimos en el primer tramo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

c) Para calcular $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ sustituimos en el segundo tramo

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = -7 + 2 = -5$$

59. Ejercicios: Ficha de ejercicios.

3.3 LÍMITE EN FUNCIONES RACIONALES $f(x)=P(x)/Q(x)$

CASO 1. Si al sustituir x por c , $Q(c) \neq 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$

Ejemplo: Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{5x + 10} = \frac{3^2 - 4}{5 \cdot 3 + 10} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

CASO 2. Si al sustituir x por c $Q(c) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm \infty \rightarrow$

Calculamos los límites laterales, sustituyendo en puntos muy próximos a c por ambos lados.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 4} = \frac{1^2 + 3}{1^2 - 5 \cdot 1 + 4} = \frac{4}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{0,9^2 + 3}{0,9^2 - 5 \cdot 0,9 + 4} = (12,29) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1,1^2 + 3}{1,1^2 - 5 \cdot 1,1 + 4} = (-14,5) = -\infty$$

CASO 3. Si al sustituir x por c $Q(c) = 0$ y $P(c) = 0 \rightarrow$ Indeterminación.

Factorizamos por Ruffini y simplificamos.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \frac{(-2)^2 - 4}{(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 10} = \frac{0}{0}$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 10 = 0$$

1	2	5	10
-2	-2	0	-10
1	0	5	0

$$x^2 + 5 = 0 \rightarrow x^2 = -5 \rightarrow x = \sqrt{-5}$$

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 10 = (x + 2)(x^2 + 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x^2 + 5)} = \frac{x - 2}{x^2 + 5} = \frac{-2 - 2}{(-2)^2 + 5} = \frac{-4}{9}$$

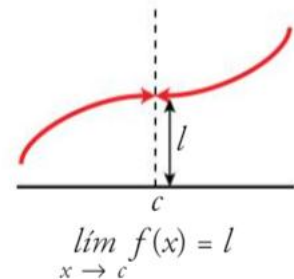
S10. Ejercicios: pág. 258, ej. 19; pág. 267, ej. 47, 48, 49, 50 a, c.

4. CONTINUIDAD

Una función es **CONTINUA** si “puede ser construida de un solo trazo”.

Una función **CONTINUA EN EL PUNTO** $x = c$ cumple:

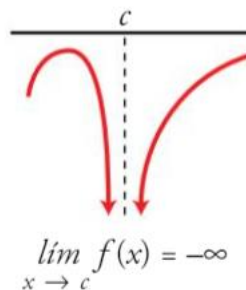
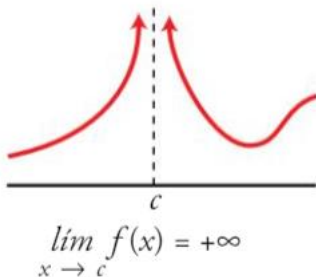
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$



Existen tres tipos de **DISCONTINUIDADES**:

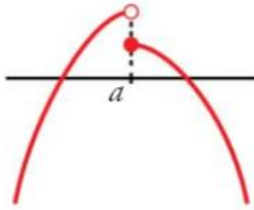
Discontinuidad de salto infinito

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$$



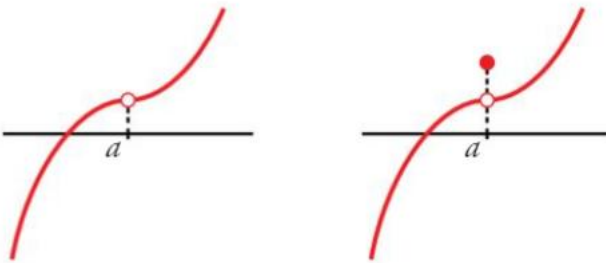
Discontinuidad de salto finito

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$



Discontinuidad evitable

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq f(c)$$



4.1 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN A TROZOS

A) Estudio de la continuidad de una función a trozos:

Las funciones a trozos pueden ser discontinuas en los puntos de ruptura.

1º Calculamos los límites laterales y valor de la función en los puntos de ruptura.

2º Clasificamos el tipo de discontinuidad.

Ejemplos: Estudia la continuidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ 2x - 1 & 0 < x < 2 \\ x + 5 & x \geq 2 \end{cases}$$

Los puntos de ruptura son $x = 0, x = 2$

$x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \rightarrow \text{La función es continua en } x = 0$$

$$x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 5) = 2 + 5 = 7$$

$$f(2) = 2 + 5 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow \text{La función es discontinua de salto finito en } x = 2$$

S11. Ejercicios: pág. 260, ej. 20; pág. 268, ej. 51, 54, 61.

B) Cálculo del parámetro desconocido para que una función sea continua:

1º Calculamos los límites laterales y valor de la función en los puntos de ruptura.

2º Igualamos las tres expresiones y resolvemos la ecuación.

Ejemplo: Halla el valor de k para que la función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x \leq 1 \\ x + k & x > 1 \end{cases}$$

El punto de ruptura es $x = 1$.

$$x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 5) = 2 \cdot 1 - 5 = 2 - 5 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + k) = 1 + k$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$1 + k = -3 \rightarrow k = -3 - 1 \rightarrow k = -4$$

S12. Ejercicios: pág. 260, ej. 22; pág. 268, ej. 55; pág. 271, ej. 12, 13, 21, 22.

4.2 CONTINUIDAD DE FUNCIONES RACIONALES $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Las funciones de tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ son discontinuas en los valores que anulan el denominador.

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación.

2º Estudiamos el tipo de discontinuidad sustituyendo la solución de la ecuación en la función.

- Si al sustituir *Numerador* $\neq 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{número}}{0} = \pm\infty$

La función es discontinua de salto infinito en dicho punto y es necesario calcular los límites laterales.

- Si al sustituir *Numerador* $= 0 \rightarrow f \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0} \rightarrow$ Factorizamos, simplificamos y volvemos a sustituir.
 - Si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{número}}{0} \rightarrow$ Discontinua de salto infinito.
 - Si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \text{número} \rightarrow$ Discontinua evitable.

Ejemplo: Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - x - 2}$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{+1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

La función es discontinua en $x = 2$ y $x = -1$.

$x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2}{(-1)^2 - (-1) - 2} = \frac{-3}{0} \rightarrow \text{Discontinua de salto infinito en } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{(-1,1)^3 - 2 \cdot (-1,1)^2}{(-1,1)^2 - (-1,1) - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{(-0,9)^3 - 2 \cdot (-0,9)^2}{(-0,9)^2 - (-0,9) - 2} = +\infty$$

$x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2^3 - 2 \cdot 2^2}{2^2 - 2 - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x+1} = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

Discontinua evitable en $x = 2$

S13. Ejercicios: pág. 260, ej. 21; pág. 268, ej. 53.

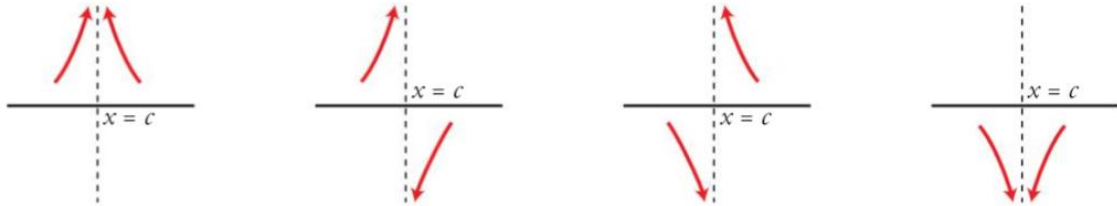
5. RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS

Las **RAMAS INFINITAS** son tramos de curva que se alejan indefinidamente. Para que haya una rama infinita es necesario que una de las variables, x o y , tienda a infinito.

Cuando una rama infinita se aproxima a una recta a esta se le llama **ASÍNTOTA**.

5.1 ASÍNTOTA VERTICAL

Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$ entonces la recta $x = c$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL**.

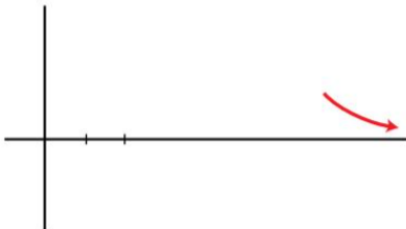


1º En las funciones racionales, igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación para el valor de la recta $x = c$.

2º Calculamos los límites laterales sustituyendo en valores próximos para conocer la posición de la curva respecto a la asíntota.

5.2 ASÍNTOTA HORIZONTAL

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ entonces la recta $y = l$ es una **ASÍNTOTA HORIZONTAL**.



1º Calculamos el límite de la función cuando $x \rightarrow \infty$ para obtener la ecuación de la recta $y = l$.

2º Tomamos un valor grande y otro pequeño para conocer la posición de la curva respecto a la asíntota.

Ejemplo: Halla las asíntotas verticales y horizontales de la función y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$$

Asíntotas verticales

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación.

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{matrix}$$

Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 2$

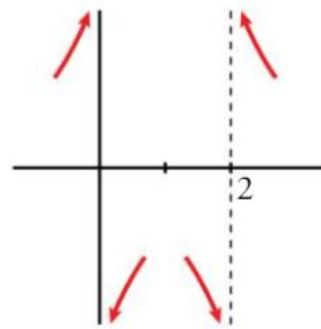
2º Estudiamos la posición de la curva respecto a cada una de ellas calculando los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{(-0,01)^2 + 1}{(-0,01)^2 - 2 \cdot (-0,01)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{(0,01)^2 + 1}{(0,01)^2 - 2 \cdot (0,01)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{(1,99)^2 + 1}{(1,99)^2 - 2 \cdot (1,99)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{(2,01)^2 + 1}{(2,01)^2 - 2 \cdot (2,01)} = +\infty$$



Asíntota horizontal

1º Calculamos el límite de la función cuando $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow y = 1$$

Asíntota horizontal: $y = 1$

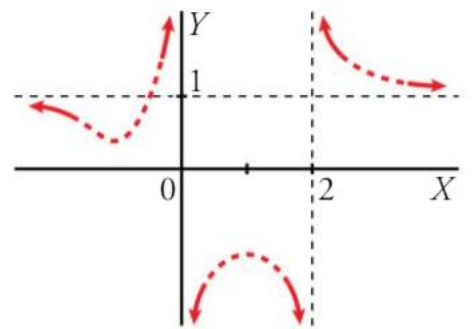
2º Estudiamos la posición de la curva respecto a la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \frac{1000^2 + 1}{1000^2 - 2 \cdot 1000} = 1^+$$

→ Por encima de 1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \frac{(-1000)^2 + 1}{(-1000)^2 - 2 \cdot (-1000)} = 1^-$$

→ Por debajo de 1

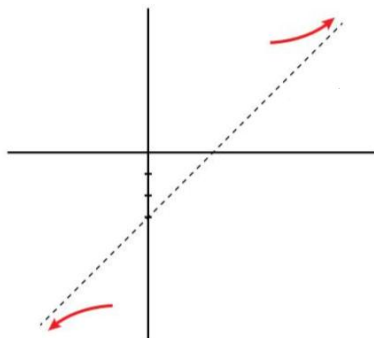


S14. Ejercicios: pág. 261, ej. 23, 24; pág. 268, ej. 56, 59.

5.3 ASÍNTOTA OBLICUA

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$, $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$ entonces $y = mx + n$ es

una **ASÍNTOTA OBLICUA**.



Ejemplo: Halla las asíntotas de la función y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-3}$$

Asíntotas verticales

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación.

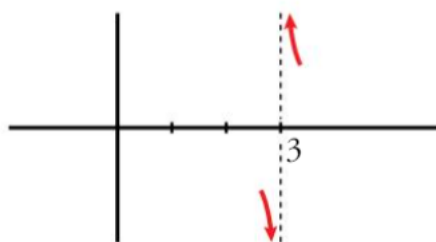
$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Asíntota vertical: $x = 3$

2º Estudiamos la posición de la curva respecto a cada una de ellas calculando los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{2 \cdot (2,9)^2}{2,9 - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{2 \cdot (3,1)^2}{3,1 - 3} = +\infty$$



Asíntota horizontal/oblicua

1º Calculamos el límite de la función cuando $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x-3} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2}{x^2 - 3x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x-3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x(x-3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 6x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x-3} = 6$$

La ecuación de la asíntota oblicua es $y = 2x + 6$

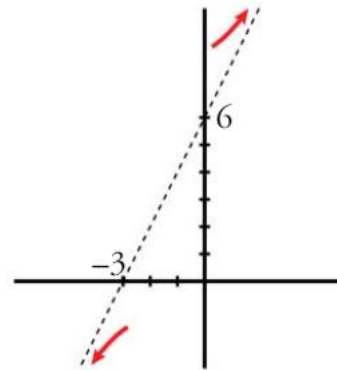
2º Estudiamos la posición de la curva respecto a la asíntota calculando $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{2x^2}{x-3} - (2x+6) = \frac{2x^2 - (2x+6) \cdot (x-3)}{x-3}$$

$$= \frac{2x^2 - (2x^2 - 6x + 6x - 18)}{x-3} = \frac{18}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{18}{x-3} = -\infty$$



S15. Ejercicios: pág. 262, ej. 25, 26; pág. 268, ej. 60.

S16-18. Ejercicios: Repaso.

S19. Ejercicios: Pre-Examen. Funciones, límites y continuidad.