

TEMA 7. VECTORS. EQUACIONS DE LA RECTA

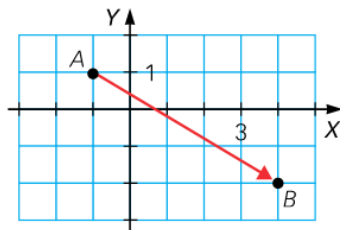
1. VECTORS

1.1 COORDENADES D'UN VECTOR

Es diu **VECTOR** a la fletxa que va de A (**ORIGEN**) a B (**EXTREM**) i es representa per $\overline{AB}$.

Les coordenades d'un vector s'obtenen restant les coordenades del extrem – les coordenades de l'origen. $\overline{AB} = B - A$

Exemple 1: Calcula les coordenades d'aquest vector.



$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} A(-1, 1) \\ B(4, -2) \end{array} \right\} &\rightarrow \overline{AB} = (4, -2) - (-1, 1) \\ &= (4 - (-1), -2 - 1) = (4 + 1, -2 - 1) \\ &= (5, -3) \end{aligned}$$

Exemple 2: Si $\overline{AB} = (5, 2)$ i $A(3, 3)$ calcula las coordenadas del punto B .

1º Llamamos a $B(x, y)$

2º Aplicamos la definición de vector.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (x, y) - (3, 3) = (5, 2) \rightarrow (x - 3, y - 3) = (5, 2) \rightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} x - 3 = 5 \rightarrow x = 5 + 3 \rightarrow x = 8 \\ y - 3 = 2 \rightarrow y = 2 + 3 \rightarrow y = 5 \end{array} \right. \end{aligned}$$

1.2 ELEMENTS D'UN VECTOR

- El **MÓDUL** d'un vector $\overline{AB} = (x, y)$ és la distància de A a B , i es calcula

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- La **DIRECCIÓ** d'un vector és la de la recta en la qual es troba i la de totes les seues paral·leles.
- Cada direcció admet dos **SENTITS** oposats.

Exemple: Calcula el mòdul del vector $\overline{AB} = (5, 2)$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

S1. Exercicis: pàg. 142, ex. 1, 2; pàg. 154, ex. 52, 56, 57, 58.

1.3 VECTORS PARAL·LELS I PERPENDICULARS

Dos **VECTORS** són **PARAL·LELS** quan tenen la mateixa direcció, $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Dos vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$ són paral·lels si les coordenades proporcionals:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Dos **VECTORS** són **PERPENDICULARS** quan es tallen formant un angle recte, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Dos vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$ són perpendicular si

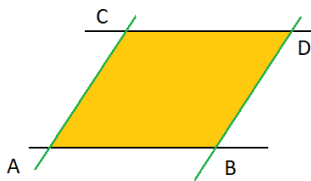
$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$

Exemple: Decideix si aquests vectors són paral·lels o perpendiculars:

- a) $\vec{u} = (1, 2)$ i $\vec{v} = (3, 6) \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \rightarrow$ Són paral·lels.
- b) $\vec{u} = (4, 2)$ i $\vec{v} = (-1, 2) \rightarrow 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = -4 + 4 = 0 \rightarrow$ Són perpendiculars.

Dos **VECTORS** són **IGUALS** quan tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i el mateix sentit, i aleshores les mateixes coordenades.

Exemple: Tenim tres punts de coordenades $A(3, 3), B(7, 6), C(7, -2)$. Troba les coordenades del punt D perquè es forme el següent paral·lelogram.



En el paral·lelogram $\overline{AB} = \overline{CD}$.

1r Anomenem $D(x, y)$ -

2n Calculem els vectors $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$

$$\overline{AB} = (7, 6) - (3, 3) = (4, 3)$$

$$\overline{CD} = (x, y) - (7, -2) = (x - 7, y + 2)$$

3r Igualem les coordenades dels vectors

$$\overline{AB} = \overline{CD} \rightarrow \begin{cases} 4 = x - 7 \rightarrow x = 11 \\ 3 = y + 2 \rightarrow y = 1 \end{cases} \rightarrow D(11, 1)$$

S2. Exercicis: pàg. 143, ex. 5, 6, 8; pàg. 155, ex. 65, 66, 70.

2. APLICACIONES

Exemple: Donat el triangle de vèrtex $A(3, 4)$, $B(4, -1)$, $C(-1, -2)$:

- a) Comprova que és isòsceles.
- b) Comprova que és rectangle.
- c) Calcula el seu perímetre.
- a) Per a comprovar si es tracta d'un triangle isòsceles calculem els mòduls dels costats:

$$\overline{AB} = (4, -1) - (3, 4) = (1, -5) \rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$\overline{BC} = (-1, -2) - (4, -1) = (-5, -1) \rightarrow |\overline{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$\overline{CA} = (3, 4) - (-1, -2) = (4, 6) \rightarrow |\overline{CA}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

És un triangle isòsceles perquè els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ mesuren el mateix.

- b) Per a comprovar si es tracta d'un triangle rectangle comproven si dos dels vectors són perpendiculars:

$$\overline{AB} \text{ i } \overline{BC} \rightarrow 1 \cdot (-5) + (-5) \cdot (-1) = -5 + (+5) = -5 + 5 = 0 \rightarrow$$

Perpendiculars

És un triangle rectangle ja que dos dels seus costats formen un angle recte.

- c) Per a calcular el seu perímetre sumem els mòduls dels tres costats.

$$\text{Perímetre} = \sqrt{26} + \sqrt{26} + \sqrt{52} = 17.41$$

S3. Exercicis: pàg. 154, ex. 63, 64; pàg. 155, ex. 69, 72.

3. OPERACIONS AMB VECTORS

Donat els vectors $\bar{u} = (u_1, u_2)$ i $\bar{v} = (v_1, v_2)$

3.1 SUMA DE VECTORS

El **VECTOR SUMA** s'obté sumant coordenada a coordenada.

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Exemple: Si $\bar{u} = (7, -3)$ i $\bar{v} = (4, 5)$, calcula $\bar{u} + \bar{v}$

$$\bar{u} + \bar{v} = (7, -3) + (4, 5) = (11, 2)$$

3.2 RESTA DE VECTORS

El **VECTOR RESTA** s'obté restant coordenada a coordenada.

$$\bar{u} - \bar{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

Exemple: Si $\bar{u} = (7, -3)$ i $\bar{v} = (4, 5)$, calcula $\bar{u} - \bar{v}$

$$\bar{u} - \bar{v} = (7, -3) - (4, 5) = (3, -8)$$

3.3 MULTIPLICACIÓ D'UN VECTOR PER UN NOMBRE

El **VECTOR** resultant de **MULTIPLICAR UN VECTOR PER UN NOMBRE**, $k \cdot \bar{v}$, s'obté multiplicant cada coordenada pel nombre , k .

Exemple: Si $\bar{v} = (2, -3)$, calcula $2\bar{v}$ i $-3\bar{v}$

$$2\bar{v} = 2 \cdot (2, -3) = (4, -6)$$

$$-3\bar{v} = -3(2, -3) = (-6, 9)$$

3.4 COMBINACIÓ LINEAL

Exemple: Si $\bar{u} = (7, -4)$ i $\bar{v} = (-5, -2)$, calcula $3\bar{u} - 2\bar{v}$

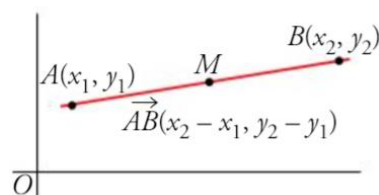
$$3\bar{u} - 2\bar{v} = 3 \cdot (7, -4) - 2 \cdot (-5, -2) = (21, -12) - (-10, -4) = (31, -8)$$

S4. Exercicis: pàg. 144, ex. 10; pàg. 145, ex. 12, 13; pàg. 155, ex. 74, 75.

4. PUNT MITJÀ

Si $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, les coordenades del **PUNT MITJÀ**, M , d'un segment AB són

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Exemple 1: Troba les coordenades del punt mitjà del segment d'extrems $A(7, 10)$ i $B(11, 2)$.

$$M\left(\frac{7 + 11}{2}, \frac{10 + 2}{2}\right) = (9, 6)$$

Exemple 2: Troba les coordenades del punt B sabent que $M(4, 4)$ és el punt mitjà segment AB i $A(7, 2)$.

1r Anomenem $B(x, y)$

2n Calculem el punt mitjà

$$\left(\frac{7 + x}{2}, \frac{2 + y}{2}\right) = (4, 4)$$

3r Igualem les coordenades

$$\begin{cases} 4 = \frac{7 + x}{2} \rightarrow 8 = 7 + x \rightarrow x = 1 \\ 4 = \frac{2 + y}{2} \rightarrow 8 = 2 + y \rightarrow y = 6 \end{cases} \rightarrow B(1, 6)$$

S5. Exercicis: pàg. 155, ex. 77, 78.

5. EQUACIONS DE LA RECTA

Qualsevol punt d'una recta (x, y) es pot descriure per un punt $P(p_1, p_2)$ i un vector director $\vec{d} = (d_1, d_2)$.

5.1 EQUACIÓ VECTORIAL

$$(x, y) = (p_1, p_2) + t(d_1, d_2)$$

5.2 EQUACIONS PARAMÈTRIQUES

Igualant coordenada a coordenada:

$$\begin{cases} x = p_1 + td_1 \\ y = p_2 + td_2 \end{cases}$$

5.3 EQUACIÓ EN FORMA CONTINUA

Si aïllem el paràmetre t i igualem les expressions resultats:

$$\frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2}$$

5.4 EQUACIÓ PUNT-PENDENT

Si aïllem $y - p_2$:

$$y - p_2 = \frac{d_2}{d_1}(x - p_1)$$

5.5 EQUACIÓ EXPLÍCITA

Si en l'equació anterior s'aïlla y :

$$y = mx + n \rightarrow m = \frac{d_2}{d_1}$$

5.6 EQUACIÓ GENERAL

Si passem tot al mateix costat obtindrem una equació de la forma:

$$Ax + By + C = 0 \text{ on } \vec{d} = (-B, A)$$

Exemple: Escriu les equacions de la recta que passa pels punts $A(1, 3)$ i $B(5, 5)$.

1r Calculem el vector director:

$$\overline{AB} = (5, 5) - (1, 3) = (4, 2)$$

2n Obtenim l'equació vectorial:

$$(x, y) = (1, 3) + t(4, 2)$$

3r Obtenim les equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

4rt Obtenim l'equació continua:

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 3}{2}$$

5é Obtenim l'equació punt-pendent:

$$y - 3 = \frac{2}{4}(x - 1) \rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

6é Obtenim l'equació explícita:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 3 \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{6}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

S6. Exercicis: pàg. 151, ex. 33, 35.

S7. Exercicis: pàg. 156, ex. 84 a, 85 a, 89 a, 90 a, 94 a, 95 a, 97 a, 98 a; pàg. 157, ex. 101 a.

5. PUNT I VECTOR D'UNA RECTA

Per a comprovar si un punt pertany a la recta substituïm les coordenades del punt en la recta. Un punt pertany a una recta si verifica la seua equació.

Exemple 1: Comprova si els punts pertanyen a les rectes.

a) $P(-5, -6)$ i $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$

Substituïm el punt en la recta:

$$\begin{aligned} -5 &= -2 + t \rightarrow t = -5 + 2 \rightarrow t = -3 \\ -6 &= 3 + 3t \rightarrow 3t = -6 - 3 \rightarrow 3t = -9 \rightarrow t = -\frac{9}{3} = -3 \\ &\rightarrow \text{El punt pertany a la recta} \end{aligned}$$

b) $P(-1, 5)$ i $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$

Substituïm el punt en la recta:

$$\begin{aligned} -1 &= -2 + t \rightarrow t = -1 + 2 \rightarrow t = 1 \\ 5 &= 3 + 3t \rightarrow 3t = 5 - 3 \rightarrow 3t = 2 \rightarrow t = \frac{2}{3} \\ 1 &\neq \frac{2}{3} \rightarrow \text{El punt no està en la recta} \end{aligned}$$

c) $P(2, 1)$ i $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-4}$

Substituïm el punt en la recta:

$$\frac{2-1}{1} = \frac{1-3}{-4} \rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-2}{-4} \rightarrow 1 \neq \frac{1}{2} \rightarrow \text{El punt no està en la recta.}$$

d) $P(-3, 2)$ i $x + 4y - 5 = 0$

$$\begin{aligned} -3 + 4 \cdot 2 - 5 &= 0 \rightarrow -3 + 8 - 5 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ &\rightarrow \text{El punt pertany a la recta} \end{aligned}$$

S8. Exercicis: pàg. 156, ex. 92, 96; pàg. 157, ex. 100.

Exemple 2: Dona una vector director, el pendent i un punt de cada recta:

a. $\frac{x-5}{3} = \frac{y+3}{2}$

$$P(5, -3), \vec{d} = (3, 2), m = \frac{2}{3}$$

b. $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 7 - 5t \end{cases}$

$$P(4, 7), \vec{d} = (3, -5), m = \frac{-5}{3}$$

c. $y = \frac{2}{3}x - \frac{19}{3}$

Donem un valor qualsevol a $x = 0$ i substituïm per a obtindre la y

$$y = \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{19}{3} = -\frac{19}{3}$$

$$P\left(0, -\frac{19}{3}\right), \vec{d} = (3, 2), m = \frac{2}{3}$$

d. $5x - 3y + 15 = 0$

Per a obtenir un punt donem un valor qualsevol a $x = 0$ i substituïm per a obtindre la y

$$5 \cdot 0 - 3y + 15 = 0 \rightarrow -3y + 15 = 0 \rightarrow 3y = 15 \rightarrow y = 5 \rightarrow P(0, 5)$$

Per a obtenir el vector recordem que $\vec{d} = (-B, A) \rightarrow \vec{d} = (3, 5)$

$$P(0, 5), \vec{d} = (3, 5), m = \frac{5}{3}$$

S9. Exercicis: pàg. 156, ex. 83, 88, 93; pàg. 157, ex. 102.

6. RECTES. PARAL·LELISME I PERPENDICULARITAT

Dos rectes son **PARAL·LELES** si tenen la mateixa pendent o vector director:

$$m = \frac{d_2}{d_1}, \bar{d} = (d_1, d_2)$$

Exemple: Troba l'equació continua de la recta que passa per $(4, -3)$ i és paral·lela a $2x + 5y - 4 = 0$

1r Aïllem la y per a obtenir el vector director:

$$5y = -2x + 4 \rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5} \rightarrow \bar{d} = (5, -2)$$

2n La recta paral·lela tindrà vector director:

$$\bar{d} = (5, -2)$$
$$\frac{x - 4}{5} = \frac{y + 3}{-2}$$

Dos rectes son **PERPENDICULARS** si els vectors directors són perpendiculars:

$$(d_1, d_2) \text{ i } (-d_2, d_1)$$

Dues rectes perpendiculars es relacionen així:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Exemple: Troba les equacions paramètriques de la recta que passa per $(-7, 2)$ i és perpendicular a $5x - 3y + 15 = 0$

1r Aïllem la y per a obtenir el vector director:

$$3y = 5x + 15 \rightarrow y = \frac{5}{3}x + \frac{15}{3} \rightarrow y = \frac{5}{3}x + 5 \rightarrow \bar{d} = (3, 5)$$

2n La recta perpendicular tindrà vector director $\bar{v} = (-5, 3)$

$$\begin{cases} x = -7 - 5t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

S10. Exercicis: pàg.153, ex. 42, 43, 44, 45, 46, 47.

S11. Exercicis: pàg. 151, ex. 34, 36, 37 a, b.

7. POSICIONS RELATIVES DE DUES RECTES

Per a esbrinar la **POSICIÓ RELATIVA** de dues rectes donades per les seues equacions, es resol el sistema format per aquestes.

- Es tallen en un punt.
- Són paral·leles.
- Són la mateixa.

Exemples: Estudia la posició relativa dels parells de rectes següents:

a)
$$\begin{aligned} r: 5x - 4y + 10 &= 0 \\ s: y &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Resolem el sistema d'equacions:

$$5x - 4 \cdot (2x + 1) + 10 = 0 \rightarrow 5x - 8x - 4 + 10 = 0 \rightarrow -3x + 6 = 0 \rightarrow$$

$$x = 2$$

$$y = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \rightarrow y = 5$$

Les rectes es tallen en el punt (2,5)

b)
$$\begin{aligned} r: \frac{x-3}{5} &= \frac{y-8}{-5} \\ s: x + y &= 11 \end{aligned}$$

1r Obtenim l'equació de la general de la recta r

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-8}{-5} \rightarrow -5 \cdot (x-3) = 5 \cdot (y-8) \rightarrow -5x + 15 = 5y - 40$$

$$5x + 5y - 55 = 0$$

2n Resolem el sistema d'equacions

$$x = 11 - y \rightarrow 5 \cdot (11 - y) + 5y - 55 = 0 \rightarrow 55 - 5y + 5y - 55 = 0 \rightarrow$$

$$0 = 0$$

El sistema té infinits punts de tall, les rectes són la mateixa.

$$\begin{aligned} c) \quad & r: (x, y) = (2, 4) + t(2, 3) \\ & s: y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2) \end{aligned}$$

1r Obtenim les equacions generals de les rectes

Equació de la recta r

$$\begin{aligned} (x, y) &= (2, 4) + t(2, 3) \rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{3} \rightarrow 3 \cdot (x-2) = 2 \cdot (y-4) \\ &\rightarrow 3x - 6 = 2y - 8 \\ &3x - 2y + 2 = 0 \end{aligned}$$

Equació de la recta s

$$\begin{aligned} m &= \frac{3}{2} \rightarrow \vec{d}_s = (2, 3) \\ y - 1 &= \frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3 + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - 2 \rightarrow 2y = 3x - 4 \\ &3x - 2y + 4 = 0 \end{aligned}$$

2n Resolem el sistema d'equacions

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 2 &= 0 \\ -3x + 2y - 4 &= 0 \rightarrow -2 = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

El sistema no té solucions, no hi ha cap punt de tall, les rectes són paral·leles.

S12. Exercicis: pàg. 152, ex. 38, 39; pàg. 157, ex. 105.

S13-14. Exercicis: Repàs.

S15. Exercicis: Pre-Examen 6. Vectors i equacions de la recta.