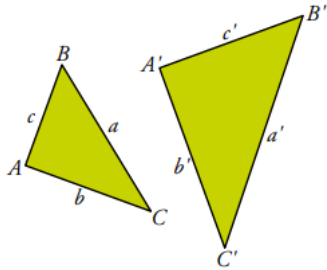


TEMA 8. SEMBLANÇA

1. SEMBLANÇA DE TRIANGLES

1.1 TRIANGLES SEMBLANTS

Dos **TRIANGLES** són **SEMBLANTS** quan:



- Els seus costats proporcionals:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \text{raó de semblança}$$

- Els seus angles, respectivament iguals:

$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'}$$

1.2 CRITERIS DE SEMBLANÇA DE TRIANGLES (Activitat Geogebra)

Es diu **CRITERI DE SEMBLANÇA** de dos triangles al conjunt de condicions que, si es compleixen, tindrem la seguretat de que els triangles son semblants.

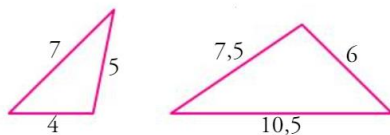
PRIMER CRITERI: Dos triangles son semblants si els seus costats son proporcionals.

SEGON CRITERI: Dos triangles son semblants si tenen dos parells d'angles iguals.

TERCER CRITERI: Dos triangles son semblants si tenen un angle igual i els costats que el formen son proporcionals.

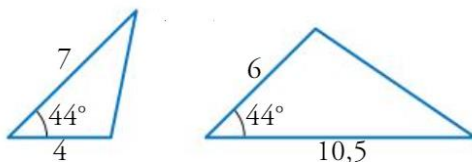
Exemple 1: Comprova si els triangles següents són semblants.

a)



$$\frac{10,5}{7} = \frac{7,5}{5} = \frac{6}{4} = 1,5 \rightarrow \text{Els tres costats són proporcionals, son semblants}$$

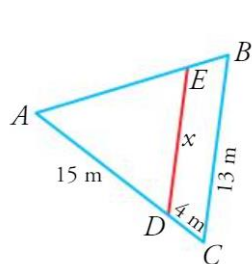
b)



$$\frac{10,5}{7} = \frac{6}{4} = 1,5$$

$\rightarrow$ Tenen un angle igual i dos costats proporcionals, son semblants

Exemple 2: Sabent que $DE \parallel CB$. Calcula el segment DE .



$$\frac{15}{15+4} = \frac{x}{13} \rightarrow \frac{15}{19} = \frac{x}{13} \rightarrow 15 \cdot 13 = 19x \rightarrow 195 = 19x \rightarrow$$

$$x = \frac{195}{19} = 10,26 \text{ m}$$

S1. Exercicis: pàg. 172, ex. 24; pàg. 180, ex. 86; pàg. 181, ex. 87, 88, 89.

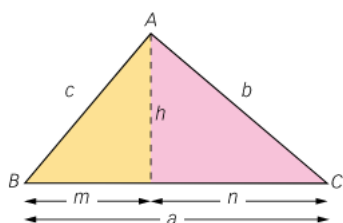
2. SEMBLANÇA EN ELS TRIANGLES RECTANGLES

Dos **TRIANGLES RECTANGLES** son **SEMBLANTS** si:

PRIMER CRITERI: Tenen igual un dels seus angles aguts.

SEGON CRITERI: Si els catets son proporcionals.

L'altura traçada sobre la hipotenusa divideix un triangle rectangle en dos triangles rectangles més, que són semblants al primer.



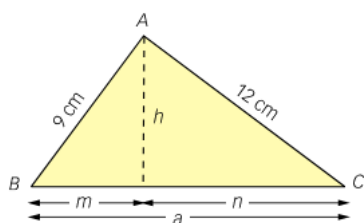
2.1 TEOREMA DEL CATET: $b^2 = a \cdot m$ i $c^2 = a \cdot n$

(Demostració Activitat Geogebra)

2.2 TEOREMA DE L'ALTURA: $h^2 = m \cdot n$

(Demostració Activitat Geogebra)

Exemple: Calcula les mesures del triangle rectangle:



1r Apliquem el Teorema de Pitàgores:

$$a^2 = 9^2 + 12^2 \rightarrow a^2 = 225 \rightarrow a = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

2n Apliquem el teorema del catet:

$$9^2 = m \cdot 15 \rightarrow m = \frac{9^2}{15} = 5,4 \text{ cm}$$

$$12^2 = n \cdot 15 \rightarrow n = \frac{12^2}{15} = 9,6 \text{ cm}$$

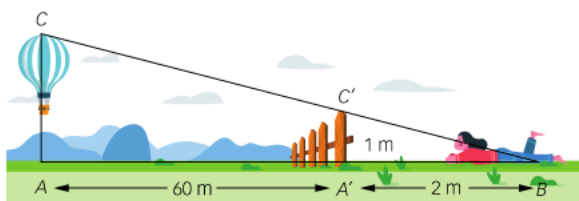
3r Apliquem el teorema de l'altura:

$$h^2 = 9,6 \cdot 5,4 = 51,84 \rightarrow h = \sqrt{51,84} = 7,2 \text{ cm}$$

S2. Exercicis: pàg. 174, ex. 31, 32; pàg. 181, ex. (98), 99.

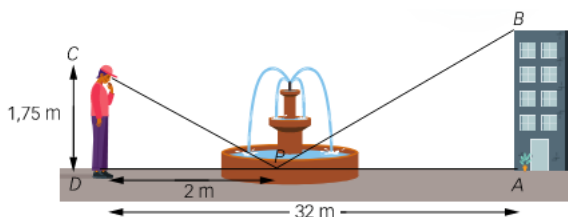
3. APLICACIONS DE SEMBLANÇA DE TRIANGLES

Exemple 1: Calcula l'altura a la que es troba el globus:



$$\frac{2}{62} = \frac{1}{x} \rightarrow 2x = 62 \rightarrow$$
$$x = \frac{62}{2} = 31 \text{ m}$$

Exemple 2: Calcula l'altura de l'edifici:



$$32 - 2 = 30 \text{ m}$$
$$\frac{2}{30} = \frac{1,75}{x} \rightarrow 2x = 30 \cdot 1,75 \rightarrow$$

$$2x = 52,5 \rightarrow x = \frac{52,5}{2} = 26,25 \text{ m}$$

S3. Exercicis: pàg. 175, ex. 34, 35, 36; pàg. 182, ex. 101, 102, 103, 104, 105.

TEMA 6. TRIGONOMETRIA

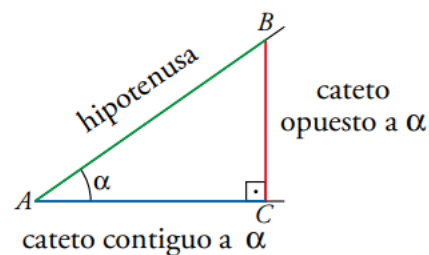
1. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE AGUT

Les **RAONS TRIGONOMÈTRIQUES** de l'angle α son:

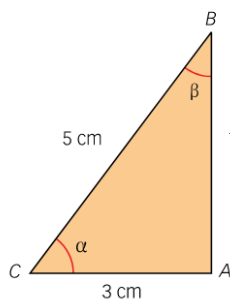
$$\sin \alpha = \frac{\text{longitud del catet oposat a } \alpha}{\text{longitud hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{longitud del catet contigu a } \alpha}{\text{longitud hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{longitud del catet oposat a } \alpha}{\text{longitud del catet contigu a } \alpha}$$



Exemple: Troba les raons trigonomètriques dels angles α i β :



1r Calculem el costat desconegut aplicant el Teorema de Pitagores:

$$5^2 = 3^2 + c^2 \rightarrow 25 = 9 + c^2 \rightarrow \\ c^2 = 25 - 9 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = \sqrt{16} = 4$$

2n Obtenim les raons trigonomètriques:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\sin \beta = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \beta = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} = 1,33$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4} = 0,75$$

S4. Exercicis: pàg. 119, ex. 4, 5; pàg. 132, ex. 57.

2. RELACIONS TRIGONOMÈTRIQUES FONAMENTALS

RELACIONS FONAMENTALS:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

2.1 RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE AGUT (DE 0° A 90°)

Exemples:

- a) Sabent que $\cos \alpha = 0,63$, calcula $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

1r Utilitzem la primera igualtat per obtenir $\sin \alpha$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + 0,63^2 = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + 0,3969 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - 0,3969 \rightarrow \sin^2 \alpha = 0,6031 \rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{0,6031} = +0,78$$

2n Utilitzem la segona igualtat per a obtenir $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,777}{0,63} = 1,23$$

- b) Sabent que $\operatorname{tg} \alpha = 2$, calcula $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Utilitzant la primera i la segona igualtat obtenim un sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow 2 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow 2 = \frac{x}{y} \rightarrow 2y = x \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Substituint la primera equació en la segona:

$$(2y)^2 + y^2 = 1 \rightarrow 4y^2 + y^2 = 1 \rightarrow 5y^2 = 1 \rightarrow y^2 = \frac{1}{5} \rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = 0,45$$

$$x = 2y \rightarrow x = 2 \cdot 0,447 = 0,89$$

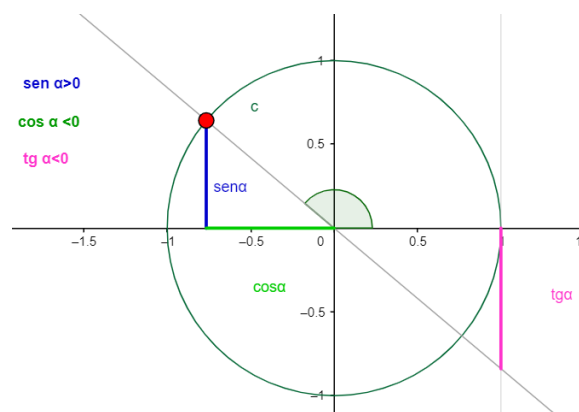
$$\sin \alpha = 0,89 \text{ i } \cos \alpha = 0,45$$

S5. Exercicis: pàg. 121, ex. 14; pàg. 133, ex. 68, 70;. (pàg. 121, ex. 10, 11, 12, 13, 15, 16)

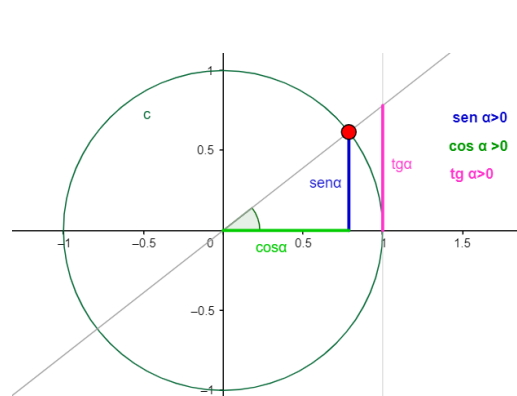
2.2 RAONS TRIGONOMÈTRICS D'UN ANGLE QUALSEVOL

CIRCUNFERENCIA GONIOMÈTRICA (Activitat Geogebra)

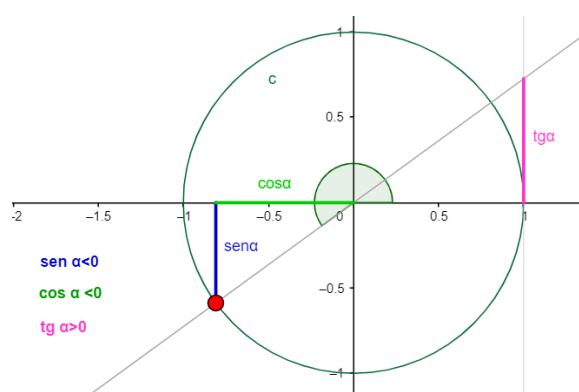
Segon quadrant



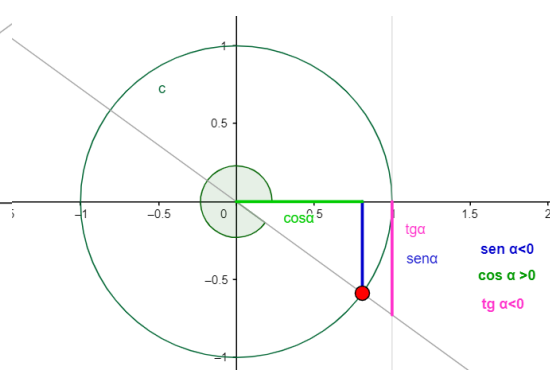
Primer quadrant



Tercer quadrant



Quart quadrant



Exemple: Explica en quin quadrant està l'angle α i calcula les raons trigonomètriques que falten:

a) $\sin \alpha = 0,63$ i $\tan \alpha < 0$

Com $\sin \alpha > 0$ i $\tan \alpha < 0$ es tracta del segon quadrant i aleshores $\cos \alpha < 0$

Apliquem la primera relació fonamental:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \rightarrow 0,63^2 + \cos^2 \alpha = 1 \\ \rightarrow 0,3969 + \cos^2 \alpha &= 1 \end{aligned}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 0,3969 \rightarrow \cos^2 \alpha = 0,6031 \rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{0,6031} = -0,78$$

Utilitzem la segona igualtat per a obtenir $\tan \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,63}{-0,78} = -0,81$$

b) $\operatorname{tg} \alpha = -0,4$ i $\alpha > 180^\circ$

Com $\operatorname{sg} \alpha = -0,4$ i $\alpha > 180^\circ$ es tracta del quart quadrant i aleshores $\sin \alpha < 0$ i $\cos \alpha > 0$

Utilitzant la primera i la segona relacions fonamentals obtenim un sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow -0,4 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow -0,4 = \frac{x}{y} \rightarrow -0,4y = x \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Substituint la primera equació en la segona:

$$(-0,4)^2 + y^2 = 1 \rightarrow 0,16y^2 + y^2 = 1 \rightarrow 1,16y^2 = 1 \rightarrow y^2 = \frac{1}{1,16} \rightarrow$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{1,16}} = +0,93$$

$$x = -0,4y \rightarrow x = -0,4 \cdot 0,93 = -0,37$$

$$\sin \alpha = -0,37 \text{ i } \cos \alpha = +0,93$$

S8. Exercicis: Fitxa. Raons trigonomètriques de qualsevol angle. (pàg. 133, ex. 82)

3. REDUCCIÓ AL PRIMER QUADRANT

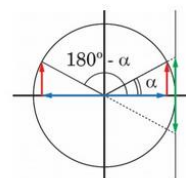
(Activitats Geogebra)

3.1 ANGLES COMPLEMENTARIS (α i $90 - \alpha$)

$$\begin{cases} \sin(90 - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha \\ \operatorname{tg}(90 - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \end{cases}$$

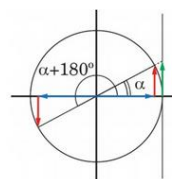
3.2 ANGLES SUPLEMENTARIS (α i $180 - \alpha$)

$$\begin{cases} \sin(180 - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180 - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$



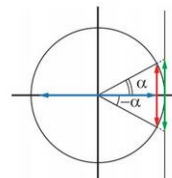
3.3 ANGLES AMB 180° DE DIFERÈNCIA (α i $180 + \alpha$)

$$\begin{cases} \sin(180 + \alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(180 + \alpha) = -\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(180 + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$



3.4 ÀNGLES OPOSATS (α i $360 - \alpha = -\alpha$)

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$



3.5 ANGLES MAYORS DE 360°

$$\begin{matrix} \alpha & : 360 \\ \beta & n \end{matrix} \rightarrow \alpha = 360^\circ \cdot n + \beta \rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \sin\beta \\ \cos\alpha = \cos\beta \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \end{cases}$$

Exemples: Si sabem que $\sin 50^\circ = 0,77$ calcula les raons trigonomètriques sense fer ús de la calculadora i reduint al primer quadrant:

$$\cos(40), \sin(130), \operatorname{tg}(230), \sin(-50), \cos(-140), \cos(320), \operatorname{tg}(1490)$$

1r Calculem les $\cos(50)$ i $\operatorname{tg}(50)$ aplicant les relacions fonamentals:

$$\sin^2(50) + \cos^2(50) = 1 \rightarrow (0,77)^2 + \cos^2(50) = 1 \rightarrow 0,5929 + \cos^2(50) = 1$$

$$\cos^2(50) = 1 - 0,5929 \rightarrow \cos^2(50) = 0,4071 \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0,4071} = 0,64$$

$$\operatorname{tg}(50) = \frac{\sin(50)}{\cos(50)} \rightarrow \operatorname{tg}(50) = \frac{0,77}{0,64} \rightarrow \operatorname{tg}(50) = 1,2$$

2n Amb les dades conegudes busquem una de les següents relacions $90 - \alpha$, $180 - \alpha$, $180 + \alpha$, $360 - \alpha$, $-\alpha$

a) $\cos(40) = \sin(90 - 40) = \sin(50) = 0,77$

b) $\sin(130) = \sin(180 - 50) = \sin(50) = 0,77$

c) $\operatorname{tg}(230) = \operatorname{tg}(180 + 50) = \operatorname{tg}(50) = 1,2$

d) $\sin(-50) = -\sin 50 = -0,77$

e) $\cos(-140) = \cos(360 - 140) = \cos(220) = \cos(180 + 40) = -\cos(40) = -0,77$

f) $\cos(320) = \cos(360 - 40) = \cos(40) = 0,77$

g) $\operatorname{tg}(1490) = \operatorname{tg}(360 \cdot 4 + 50) = \operatorname{tg}(50) = 1,2$

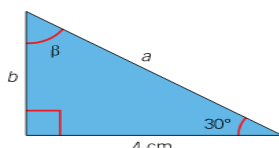
S9. Exercicis: pàg. 125, ex. 27, 28, 29; pàg. 126, ex. 30, 31; pàg. 127, ex. 35.

4. RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES

RESOLDRE UN TRIANGLE es trobar un o més elements desconeguts (costats o angles) a partir d'alguns elements coneguts.

4.1 CONEGUTS DOS COSTATS

Exemple: Resol aquest triangle rectangle.



1r Apliquem el teorema de Pitàgores per a obtenir el costat desconegut.

$$17^2 = 8^2 + c^2 \rightarrow 289 = 64 + c^2$$

$$c^2 = 289 - 64 = 225 \rightarrow c = \sqrt{225} = 15$$

2n Calculem els angles amb les raons trigonomètriques:

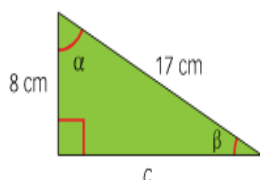
$$\cos \alpha = \frac{8}{17} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{8}{17}\right) = 61,93^\circ$$

3r Calculem el tercer angle aplicant que la suma dels tres angles d'un triangle son 180° .

$$180 = 90 + 61,93 + \beta \rightarrow \beta = 180 - 90 - 61,93 = 28,07^\circ$$

4.2 CONEGUTS UN COSTAT I UN ANGLE

Exemple: En un triangle rectangle, un angle agut mesura 27° i la hipotenusa, $46m$. Troba els elements desconeguts.



1r Apliquem les raons trigonomètriques per a calcular els dos costats:

$$\operatorname{tg} 30 = \frac{b}{4} \rightarrow b = 4 \cdot \operatorname{tg}(30) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2,31 \text{ cm}$$

$$\cos 30 = \frac{4}{a} \rightarrow a = \frac{4}{\cos 30} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

2n Calculem el tercer angle aplicant que la suma dels tres angles d'un triangle son 180° .

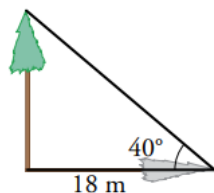
$$180 = 90 + 30 + \alpha \rightarrow \alpha = 180 - 90 - 30 = 60^\circ$$

S10. Exercicis: pàg. 128, ex. 37, 38, 39; pàg. 134, ex. 92, 93.

5. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Exemple 1: Quan els raigs del sol formen 40° amb el terra, l'ombra d'un arbre fa 18 m.

Quina és la seva alçada?

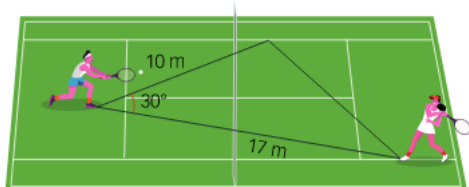


$$\operatorname{tg} 40 = \frac{x}{18} \rightarrow x = 18 \cdot \operatorname{tg} 40 = 15,1 \text{ m}$$

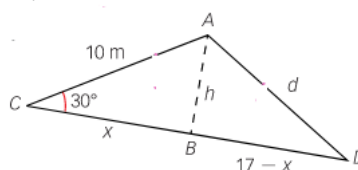
S11. Exercicis: pàg. 129, ex. 40, 41, 42, 43, 44; pàg. 135, ex. 112, 113; pàg. 136, ex. 115.

Exemple 2: Marta y Xavier estan jugant al tennis. Marta llança la pilota i aquesta recorre 17m. Xavier la torna amb un angle de 30° , i aquest vegada la pilota recorre 10 m.

Quina distància haurà de recórrer Marta per a arribar fins a la pilota?



1r Dividim el triangle en dos triangles rectangles.



2n Apliquem les raons trigonomètriques per a calcular les dades desconegudes.

$$\operatorname{sen} 30 = \frac{h}{10} \rightarrow h = 10 \cdot \operatorname{sen} 30 \rightarrow h = 5 \text{ m}$$

$$\cos 30 = \frac{x}{10} \rightarrow x = 10 \cdot \cos 30 \rightarrow x = 8,66 \text{ m} \rightarrow 17 - x = 17 - 8,66 = 8,34 \text{ m}$$

Apliquem Pitàgores:

$$d^2 = 5^2 + 8,34^2 \rightarrow d^2 = 25 + 69,5556 = 94,5556 \rightarrow d = \sqrt{94,5556} = 9,72 \text{ m}$$

S12. Exercicis: pàg. 129, ex. 43; pàg. 135, ex. 114; pàg. 136, ex. 116.

S13. Exercicis: Fitxa Semblança

S14. Exercicis: Fitxa Raons trigonomètriques

S15. Exercicis: Fitxa Problemes de trigonometria

S16. Exercicis: Pre-Examen 5. Semblança i trigonometria.