TEMA 4. EQUACIONS

1. EQUACIONS DE SEGON GRAU

Les equacions de segon grau son de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad amb\ a \neq 0$$

Exemple 1: Resol $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

1r Operem les identitats notables:

$$(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4) = (x^2 + 6x + 9) + x^2 - 20$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 20$$

2n Passem tots els termes a un mateix costat:

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 - x^2 - 6x - 9 - x^2 + 20 = 0$$

3r Agrupem:

$$2x^2 - 8 = 0$$

4rt Resolem l'equació:

$$2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{2} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$$

Exemple 2: Resol $\frac{x^2}{6} + \frac{5}{2} - \frac{x}{3} = x$

1r Reduïm a comú denominador i eliminem els denominadors:

$$\frac{x^2 + 15 - 2x}{6} = \frac{6x}{6}$$

$$x^2 + 15 - 2x = 6x$$

2n Passem tots els termes a un mateix costat:

$$x^2 + 15 - 2x - 6x = 0$$

3r Agrupem:

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

4rt Resolem l'equació:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

S1. Exercicis: pàg. 88, ex. 47, 49.

2. EQUACIONS BIQUADRADES

Les equacions biquadrades son de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

1r Per resoldre l'equació efectuem el canvi $x^4 = y^2, x^2 = y$ amb la qual cosa queda una equació de segon grau amb la incògnita y:

$$ay^2 + by + c = 0$$

2n Resolem l'equació de segon grau.

3r Desfem el canvi i calculem el valor de x. $x = \pm\sqrt{y}$

Exemples: Resol les següents equacions:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

1r Realitzem el canvi $y^2 - 10y + 9 = 0$

2n Resolem l'equació de segon grau:

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$
$$= \begin{cases} \frac{18}{2} = 9 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

3r Desfem el canvi: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3; x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

b) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

1r Realitzem el canvi $y^2 - 2y - 3 = 0$

2n Resolem l'equació de segon grau:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$= \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

3r Desfem el canvi: $x = \pm\sqrt{6}; x = \pm\sqrt{-1} \not\in$

c) $x^4 - 5x^2 = 0$

1r Realitzem el canvi $y^2 - 5y = 0$

2n Resolem l'equació de segon grau:

$$y(y - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y - 5 = 0 \rightarrow y = 5 \end{cases}$$

3r Desfem el canvi: $x = \pm\sqrt{0} = 0; x = \pm\sqrt{5}$

S2. Exercicis: pàg. 82, ex. 19. (pàg. 82, ex.16; pàg. 89, ex. 61)

3. EQUACIONS FACTORITZABLES

Son equacions polinòmiques que es poden factoritzar.

Exemple: Resol l'equació $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x = 0$

1r Traiem factor comú

$$x(x^3 + x^2 - 4x - 4) = 0$$

2n Apliquem la regla de Ruffini

	1	1	-4	-4
2		2	6	4
	$1x^2$	$+3x$	+2	0

3r Resolem l'equació de segon grau

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -\frac{2}{2} = -1 \\ -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

4t Factoritzem

$$x(x - 2)(x + 1)(x + 2) = 0$$

5è Igualem a zero i resolem

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0; x = 2 \\ x + 1 = 0; x = -1 \\ x + 2 = 0; x = -2 \end{cases}$$

S3. Exercicis: pàg. 83, ex. 22, 23. (pàg. 90, ex.65)

4. EQUACIONS RACIONALS

Son equacions amb x en el denominador.

Exemple: Resol l'equació $\frac{x}{x-3}-\frac{x+3}{x+1}=\frac{x^2-3}{x^2-2x-3}$

1r Factoritzem els denominadors i calculem el mcm:

$$\left.\begin{matrix} x-3 \\ x+1 \\ x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \end{matrix}\right\} mcm=(x-3)(x+1)$$

2n Reduïm a comú denominador:

$$\frac{x(x+1)}{(x-3)(x+1)}-\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\frac{x^2-3}{(x-3)(x+1)}$$

3r Eliminem els denominadors i resolem l'equació:

$$x(x+1)-(x+3)(x-3)=x^2-3$$

$$x^2+x-(x^2-9)=x^2-3$$

$$x^2+x-x^2+9=x^2-3$$

$$-x^2+x+12=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot(12)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{-2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{-2}=\frac{-1\pm7}{-2}$$

$$=\begin{cases}\frac{6}{-2}=-3\\ \frac{-8}{-2}=4\end{cases}$$

4º Comprovem que les solucions son vàlides substituint en l'equació inicial.

$$\begin{cases} x=-3\rightarrow\frac{-3}{-3-3}-\frac{-3+3}{-3+1}=\frac{(-3)^2-3}{(-3)^2-2\cdot(-3)-3}\rightarrow\frac{3}{6}-0=\frac{6}{12}\rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ \qquad\qquad Solució\ vàlida \\ x=4\ \rightarrow\ \frac{4}{4-3}-\frac{4+3}{4+1}=\frac{4^2-3}{4^2-2\cdot4-3}\rightarrow4\ -\frac{7}{5}=\frac{13}{5}\rightarrow\frac{13}{5}=\frac{13}{5} \\ \qquad\qquad Solució\ vàlida \end{cases}$$

S4. Exercicis: pàg. 84, ex. 25; pàg. 90, ex 73. (pag. 84, ex. 24; pàg. 91, ex. 75, 76).

5. EQUACIONS RADICALS

Son equacions en què la x es troba dins de l'arrel quadrada.

Exemple: Resol l'equació $\sqrt{2x-3}+1=x$

1r Aïllem l'arrel en un costat de la igualtat.

$$\sqrt{2x-3}=x-1$$

2n Elevem al quadrat ambdós costats.

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=(x-1)^2$$

3r Eliminem l'arrel quadrada i desenvolupem el producte notable.

$$2x-3=x^2-2x+1$$

$$2x-3-x^2+2x-1=0$$

$$-x^2+4x-4=0$$

4t Resolem l'equació de segon grau:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{-2}=\frac{-4\pm\sqrt{0}}{-2}=\frac{-4}{-2}=2$$

5è Comprovem si la solució és vàlida substituint en l'equació inicial:

$\sqrt{2\cdot 2-3}+1=\sqrt{4-3}+1=\sqrt{1}+1=2$

La solució és vàlida.

S5. Exercicis: pàg. 85, ex. 27.

S6. Exercicis. Fitxa: Equacions

S7. Exercicis. Pre-Examen 3. Equacions

S8. Examen 3. Equacions