

TEMA 4 i 5. INEQUACIONS i SISTEMES

1. INEQUACIONS LINEALS

Una INEQUACIÓ és una desigualtat entre expressions algebraiques.

Per a resoldre les inequacions lineals amb una incògnita aïllem la x com en les equacions.

IMPORTANT. Al dividir entre un nombre negatiu es canvia la desigualtat.

La solució d'una inequació és un interval.

Exemple 1: Resol $-2x + 1 < 7$.

1r Aïllem la x. $-2x < 7 - 1 \rightarrow -2x < 6 \rightarrow x > \frac{6}{-2} \rightarrow x > -3$

2n Expressem la solució en forma d'interval.

Solució: $(-3, \infty)$

Exemple 2: Resol $2x - 7 \leq 3 - \frac{x}{2}$.

1r Reduïm a comú denominador i eliminem denominadors.

$$2x - 7 \leq 3 - \frac{x}{2} \rightarrow \frac{4x - 14}{2} \leq \frac{6 - x}{2} \rightarrow 4x - 14 \leq 6 - x$$

2n Aïllem la x.

$$4x + x \leq 14 + 6 \rightarrow 5x \leq 20 \rightarrow x \leq \frac{20}{5} \rightarrow x \leq 4$$

2n Expressem la solució en forma d'interval.

Solució: $(-\infty, 4]$

S1. Exercicis: pàg. 86, ex. 31, pàg. 91, ex 84, 87. (pàg. 86, ex. 32, pàg. 91, ex. 85)

2. INEQUACIONS QUADRÀTIQUES

Les INEQUACIONS QUADRÀTIQUES son de la forma:

$ax^2 + bx + c < 0$ o $ax^2 + bx + c > 0$ (o amb els signes: $\leq$ o $\geq$).

Exemple: Resol $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

1r Resolem l'equació de segon grau.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

2n Representem sobre la recta real les dues solucions obtingudes.



3r Estudiem el signe de la paràbola substituint en valors de cada un dels intervals.

Substituïm per $x = 0 \rightarrow 0^2 - 5 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$

Substituïm per $x = 2 \rightarrow 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = -10 \leq 0$ 

Substituïm per $x = 5 \rightarrow 5^2 - 5 \cdot 5 + 4 = 4 > 0$

4rt La solució seran els intervals on es verifica la inequació inicial.

Solució: $[1, 4]$

S2. Exercicis: pàg. 87, ex. 35, 36, 37.

3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS AMB UNA INCÒGNITA

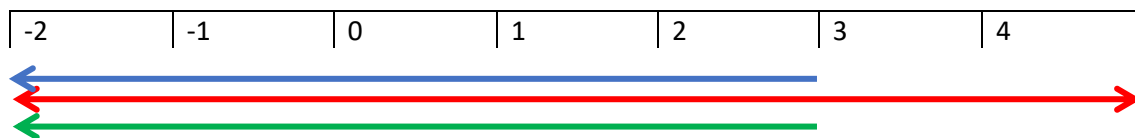
La solució d'un SISTEMA D'INEQUACIONS és la solució comú a totes les inequacions del sistema.

Exemple: Resol el sistema $\begin{cases} 3x - 9 < 0 \\ 2x + 4 \geq 0 \end{cases}$

1r Resolem cada inequació per separat.

$$\begin{cases} 3x - 9 < 0 \rightarrow 3x < 9 \rightarrow x < 3 \\ 2x + 4 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -4 \rightarrow x \geq -2 \end{cases}$$

2n Representem les solucions. La solució del sistema serà l'interval comú.



Solució: $[-2, 3)$

S3. Exercicis: pàg. 105, ex. 23, 24, 25; (pàg. 105, ex. 26).

4. INEQUACIONS LINEALS AMB DOS INCÒGNITES

Una inequació lineal amb dues incògnites és de la forma:

$$ax + by + c < 0 \text{ o } ax + by + c > 0$$

(o bé amb els signes així: $\leq$ o $\geq$).

La solució és un dels semiplà que està a un costat de la recta $ax + by + c = 0$.

1r Representem la recta.

Quan a la desigualtat no hi ha igual ($<$ o $>$) la recta es dibuixa amb traç discontinu.

2n Estudiem el signe per identificar el semiplà.

Exemple: Resol la inqueació:

$$x + y \leq 6$$

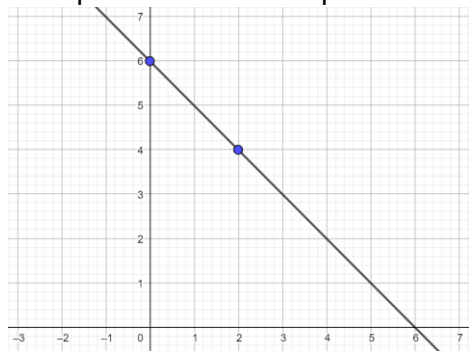
1r Substituïm la desigualtat per un $=$ i aïllem la variable y .

$$x + y = 6 \rightarrow y = 6 - x$$

2n Donem dos valors qualssevol a la x i calculem la y corresponent.

x	y
0	$y = 6 - 0 = 6$
2	$y = 6 - 2 = 4$

3r Representem els dos punts i els unim formant una recta.

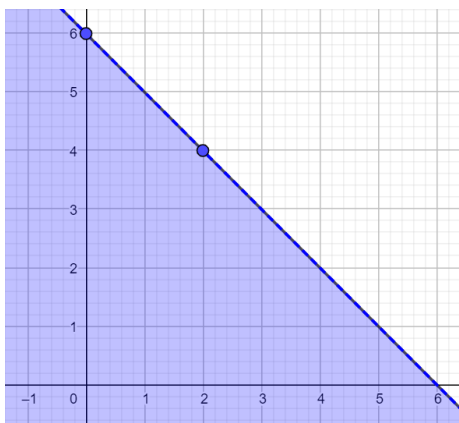


4t Prenem un punt qualsevol que no estiga a la recta, per exemple $(0, 0)$, i substituïm a la inequació.

Si es compleix la desigualtat, la solució serà el semiplà on es troba aquest punt.

Si no es compleix la desigualtat, serà el semiplà contrari.

$$0 + 0 \leq 6 \rightarrow 0 \leq 6 \text{ Verdader}$$



S4. Exercicis: pàg. 106, ex. 27.

5. SISTEMES D'INEQUACIONS LINEALS AMB DOS INCÒGNITES

La solució d'un sistema d'inequacions lineals amb dues incògnites és la intersecció dels dos semiplans.

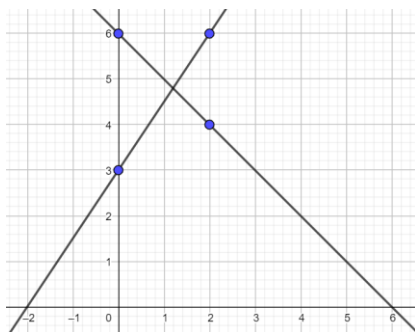
Exemple: Resol el sistema d'inequacions lineals $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 3x - 2y \geq -6 \end{cases}$

1r Aïllem la y , donem valors a la x , calculem dos punts de cada recta i representem les rectes.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} y &= 6 - x \\ -2y &= -6 - 3x \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} y &= 6 - x \\ y &= \frac{6 + 3x}{2} \end{aligned}$$

x	y
0	$y = 6 - 0 = 6$
2	$y = 6 - 2 = 4$

x	y
0	$y = \frac{6 + 3 \cdot 0}{2} = \frac{6}{2} = 3$
2	$y = \frac{6 + 3 \cdot 2}{2} = \frac{12}{2} = 6$

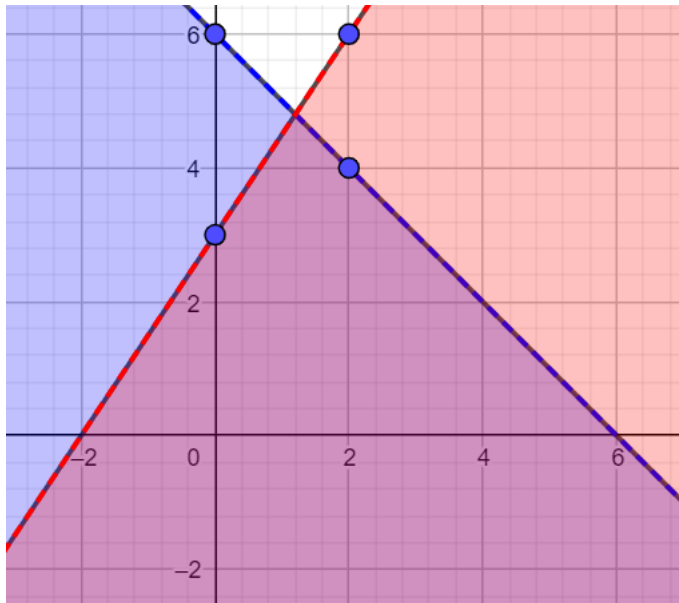


2n Prenem un punt qualsevol, per exemple $(0, 0)$, i substituïm en cadascuna de les inequacions per conèixer el semiplà de cadascuna.

$$0 + 0 \leq 6 \rightarrow 0 \leq 6 \text{ Verdader}$$

$$3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \geq -6 \rightarrow 0 \geq -6 \text{ Verdader}$$

La solució serà la intersecció dels dos semiplans.



S5. Exercicis: pàg. 107, ex. 29, 30. (pàg. 111, ex. 65, 66, 67, 71, 72)

6. SISTEMES D'EQUACIONS NO LINEALS

Per a resoldre el sistema d'equacions no lineals utilitzarem dos mètodes:

- Substitució.
- Reducció.

En els sistemes amb arrels, denominadors o logaritmes caldrà comprovar totes les solucions sobre el sistema d'equacions inicials.

6.1 SUBSTITUCIÓ

Exemple 1: Resol aquest sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \sqrt{x + y} + y = x \end{cases}$$

1r Aïllem una de les variables (x o y) en una de les dues equacions:

$$y = 2x - 9$$

2n Substituïm en l'altra equació:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y} + y &= x \\ \sqrt{x+2x-9} + 2x-9 &= x \\ \sqrt{3x-9} + 2x-9 &= x\end{aligned}$$

3r Resolem l'equació:

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-9} &= 9-x \\ (\sqrt{3x-9})^2 &= (9-x)^2 \\ 3x-9 &= 81-18x+x^2 \\ x^2-21x+90 &= 0 \\ x &= \frac{21 \pm \sqrt{(-21)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 90}}{2 \cdot 1} = \frac{21 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{21 \pm 9}{2} = \begin{cases} x=6 \\ x=15 \end{cases}\end{aligned}$$

4rt Substituïm en l'altra equació per a obtenir el valor de la segona variable.

$$\begin{cases} x=6 \rightarrow y=2 \cdot 6-9 \rightarrow y=3 \\ x=15 \rightarrow y=2 \cdot 15-9 \rightarrow y=21 \end{cases}$$

5é Comprovem les solucions:

$$\begin{aligned}\begin{cases} 2 \cdot 6-3=9; 12-3=9; 9=9 \\ \sqrt{6+3}+3=6; \sqrt{9}+3=6; 3+3=6; 6=6 \end{cases} & \text{Solución válida} \\ \begin{cases} 2 \cdot 15-21=9; 30-21=9; 9=9 \\ \sqrt{15+21}+21=15; \sqrt{36}+21=15; 6+21=6; 27 \neq 6 \end{cases} & \text{Solución no válida}\end{aligned}$$

S6. Exercicis: pàg. 103, ex. 18.

Exemple 2: Resol aquest sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$$

1r En les equacions amb denominadors, comencen reduint a comú denominador i eliminant els denominadors.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \rightarrow \frac{y+x}{xy} = \frac{xy-1}{xy} \rightarrow y+x = xy-1$$

2n Substituïm el valor de xy de la 2ª equació en la 1ª equació.

$$xy = 6 \rightarrow y+x = 6-1 \rightarrow y+x = 5$$

3r Aïllem una de les variables (x o y)

$$y = 5 - x$$

4rt Substituïm aquest valor en la segon equació:

$$xy = 6 \rightarrow x(5 - x) = 6 \rightarrow 5x - x^2 = 6 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

5é Resolem l'equació:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

6é Substituïm els valors obtinguts en la variable aïllada.

$$\begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 5 - 3 \rightarrow y = 2 \\ x = 2 \rightarrow y = 5 - 2 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

7é Comprovem les solucions:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{6} \rightarrow \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \\ 2 \cdot 3 = 6 \end{cases} \quad \text{Solució vàlida}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{6} \rightarrow \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \\ 3 \cdot 2 = 6 \end{cases} \quad \text{Solució vàlida}$$

S7. Exercicis: pàg. 103, ex. 19 a, 20a.

6.2 REDUCCIÓ

Exemple: Resol aquest sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$$

1r Sumem les dues equacions per a que una de les dues variables desaparega:

$$2x^2 = 98$$

2n Resolem l'equació:

$$x^2 = \frac{98}{2}$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \sqrt{49} = \pm 7$$

3r Substituïm en una equació per a obtenir el valor de la segona variable.

$$\begin{cases} x = 7 \rightarrow 7^2 + y^2 = 58 \rightarrow 49 + y^2 = 58 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm\sqrt{9} \rightarrow y = \pm 3 \\ x = -7 \rightarrow (-7)^2 + y^2 = 58 \rightarrow 49 + y^2 = 58 \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = \pm\sqrt{9} \rightarrow y = \pm 3 \end{cases}$$

$$x = 7, y = 3; x = 7, y = -3; x = -7, y = 3; x = -7, y = -3$$

S8. Exercicis: pàg. 111, ex. 62.

7. PROBLEMES DE SISTEMES D'EQUACIONS

S9. Exercicis: pàg. 112, ex. 76, 77, 80, 82.

S10. Exercicis: Fitxa Problemes de sistemes d'equacions.

S11. Exercicis: Fitxa Inequacions.

S12. Exercicis: Fitxa Sistemes d'equacions no lineals.

S13. Exercicis: Fitxa Pre-Examen 4. Inequacions i sistemes.