

# TEMA 3. POLINOMIS I FRACCIONS ALGEBRAIQUES

## 1. OPERACIONS AMB POLINOMIS

### 1.1 SUMA

Agrupem els monomis semblants.

Exemple: Calcula:

$$(6x^2 - 4x + 1) + (x^3 + 2x^2 - 3x - 11) = x^3 + 8x^2 - 7x - 10$$

### 1.2 RESTA

1º Canviem el signe de TOTS els monomis del segon polinomi.

2º Agrupem els monomis semblants.

Exemple: Calcula:

$$(6x^2 - 4x + 1) - (x^3 + 2x^2 - 3x - 11) = -x^3 + 4x^2 - x + 12$$

### 1.3 MULTIPLICACIÓ D'UN MONOMI PER UN POLINOMI

Multipliquem el monomi per TOTS els monomis del polinomi.

Exemples: Calcula:

$$a) (3x^2) \cdot (x^3 - 2x - 1) = 3x^5 - 6x^3 - 3x^2$$

$$b) 2x \cdot (x^2 - 3) - 3x^2 \cdot (x + 5) = 2x^3 - 6x - 3x^3 - 15x^2 = -x^3 - 15x^2 - 6x$$

### 1.4 MULTIPLICACIÓ DE DOS POLINOMIS

1º Multipliquem TOTS els monomis del primer polinomi per TOTS els monomis del segon polinomi.

2º Agrupem els monomis semblants.

Exemple: Calcula:

$$\begin{aligned}(5x^3 - 2x^2 - 1) \cdot (6x - 3) &= 30x^4 - 15x^3 - 12x^3 + 6x^2 - 6x + 3 = \\ &= 30x^4 - 27x^3 + 6x^2 - 6x + 3\end{aligned}$$

**S1. Exercicis: pàg. 68, ex. 51, 52.**

## 1.5 PRODUCTES NOTABLES

|                               |
|-------------------------------|
| $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ |
| $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ |
| $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  |

Exemples: Desenvolupa:

a)  $(5x - 3)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3 + 3^2 = 25x^2 - 30x + 9$

b)  $(2 + 4x)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4x + (4x)^2 = 4 + 16x + 16x^2$

c)  $(3x - y)(3x + y) = (3x)^2 - y^2 = 9x^2 - y^2$

## 1.6 OPERACIONS AMB PRODUCTES NOTABLES

Exemple: Calcula:

$$3x(2x - 1) - x(x - 2)^2 - (x - 1)(x + 1) =$$

1º Productes notables  $= 3x(2x - 1) - x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 1) =$

2º Multipliquem  $= 6x^2 - 3x - x^3 + 4x^2 - 4x - x^2 + 1 =$

3º Agrupem  $= -x^3 + 9x^2 - 7x + 1$

**S2. Exercicis: pàg. 59, ex. 10; pàg. 69, ex. 73.**

**S3. Exercicis. pàg. 68, ex. 59.**

## 1.7 DIVISIÓ DE POLINOMIS

Exemple: Calcula  $(3x^3 + 5x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 3x + 2)$

1r Col·loquem el dividend deixant buits per als termes que falten.

$$\begin{array}{r}
 3x^4 \quad +5x^3 \quad \quad -2x \quad +3 \quad | \quad x^2 - 3x + 2 \\
 -3x^4 \quad +9x^3 \quad -6x^2 \quad \quad \quad \quad | \quad 3x^2 + 14x + 36 \\
 \hline
 / \quad 14x^3 \quad +6x^2 \quad -2x \quad +3 \\
 -14x^3 \quad +42x^2 \quad -28x \quad \quad \quad \quad \\
 \hline
 / \quad 36x^2 \quad -30x \quad +3 \\
 36x^2 \quad +108x \quad -7 \\
 \hline
 / \quad 78x \quad -6
 \end{array}$$

2n Dividim el primer terme del dividend entre el primer terme del divisor. El resultat serà el primer terme del quocient.

$$\begin{aligned}
 3x^4 : x^2 &= 3x^2 \\
 14x^3 : x^2 &= 14x \\
 36x^2 : x^2 &= 36
 \end{aligned}$$

3r Multipliquem aquest terme pel divisor i situem el resultat CANVIANT DE SIGNE sota el dividend.

$$\begin{aligned}
 3x^2 \cdot x^2 &= 3x^4 \\
 3x^2 \cdot (3x) &= -9x^3 \\
 3x^2 \cdot 2 &= 6x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14x \cdot x^2 &= 14x^2 \\
 14x \cdot (-3x) &= -42x^2 \\
 14x \cdot 2 &= 28x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 36 \cdot x^2 &= 36x^2 \\
 36x \cdot (-3x) &= -108x \\
 36 \cdot 2 &= 72
 \end{aligned}$$

4t Sumem.

5è Repetim el procés fins que el grau de la resta sigui menor que el grau del divisor.

**S4. Exercicis: pàg. 60, ex. 12.**

## 1.8 DIVISIÓ PER RUFFINI

Per dividir un polinomi per  $(x - a)$  o  $(x + a)$  podem utilitzar la regla de Ruffini.

Exemple 1: Realitza la divisió utilitzant la regla de Ruffini.

$$(5x^4 - 41x^2 + 17x - 4) : (x - 3)$$

1r Col·loquem els coeficients del dividend i l'OPOSAT del divisor.

|    |                 |                   |     |     |     |
|----|-----------------|-------------------|-----|-----|-----|
|    | 5               | 0                 | -41 | 17  | -41 |
| +3 |                 | 15                | 45  | 12  | 87  |
|    | 5x <sup>3</sup> | +15x <sup>2</sup> | +4x | +29 | 46  |

2n Baixem el primer número.

3r Multipliquem en diagonal.

Quocient:  $5x^3 + 15x^2 + 4x + 29$   
Residu: 46

4t Sumem en vertical.

5è Afegim les lletres.

Exemple 2: Realitza la divisió utilitzant la regla de Ruffini.

$$(x^2 + 2x - 3) : (2x - 6)$$

1r Dividim el divisor entre 2.

$$(2x - 6) : 2 = x - 3$$

2n Apliquem la regla de Ruffini.

|    |    |    |     |
|----|----|----|-----|
|    | 1  | 2  | -3  |
| +3 |    | 3  | 15  |
|    | 1x | +5 | +12 |

3r El quocient de la divisió serà el quocient inicial entre el nombre perquè s'ha dividit el divisor.

Quocient:  $\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$   
Residu: 12

**S5. Exercicis: pàg. 61, ex. 15, 16, 17; pàg. 70, ex. 83.**

Exemple: Calcula el valor de m perquè  $(2x^4 + 8x^3 - 20x^2 - 24x + 16m)$  siga divisible per  $(x - 2)$

Perquè siga divisible el residu ha de ser zero.

|   |                 |                   |     |     |           |
|---|-----------------|-------------------|-----|-----|-----------|
|   | 2               | 8                 | -20 | -24 | 16m       |
| 2 |                 | 4                 | +24 | +8  | -32       |
|   | 2x <sup>3</sup> | +12x <sup>2</sup> | +4x | -16 | -32 + 16m |

$-32 + 16m = 0; 16m = 32; m = 32:16; m = 2$

**S6. Exercicis: pàg. 61, ex. 18, 19, 20.**

## 2. TEOREMA DEL RESIDU

### TEOREMA DEL RESIDU

El valor numèric d'un polinomi  $P(x)$  per a  $x = a$  coincideix amb el residu de la divisió  $P(x): (x - a)$

Exemple 1: Calcula el valor numèric del polinomi  $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$  per a  $x = 3$ .

- a) Utilitzant la definició del valor numèric.
- b) Mitjançant el teorema del residu.

a.  $P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 + 2 = 5$

b. Aplicant el teorema del residu:

|    |   |    |   |   |
|----|---|----|---|---|
|    | 1 | -3 | 1 | 2 |
| +3 |   | 3  | 0 | 3 |
|    | 1 | 0  | 1 | 5 |

$$P(3) = 5$$

Exemple 2: Calcula el valor de  $m$  perquè la divisió siga exacta.

$$(x^3 - 7x + m): (x - 2)$$

En lloc de fer la divisió, apliquem el teorema del residu:

$$P(2) = 2^3 - 7 \cdot 2 + m = -6 + m \rightarrow -6 + m = 0 \rightarrow m = 6$$

**S7. Exercicis: pàg. 62, ex. 21, 22, 23, 24, 25.**

### 3. ARRELS D'UN POLINOMI

Un nombre  $a$  és una **ARREL DEL POLINOMI**  $P(x)$  si  $P(a) = 0$ .

Si  $P(x)$  és divisible entre  $(x - a)$  llavors  $a$  és una **ARREL** de  $P(x)$ .

Exemple 1: Comprova si  $x = 2$  i  $x = 3$  són arrels del polinomi  $P(x) = x^3 - 8$ .

$$P(2) = 2^3 - 8 = 0 \rightarrow 2 \text{ és arrel de } P(x)$$

$$P(3) = 3^3 - 8 = 19 \rightarrow 3 \text{ no és arrel de } P(x)$$

Exemple 2: Calcula les arrels del polinomi  $P(x) = x^2 + 2x - 3$ .

|       |   |    |    |
|-------|---|----|----|
|       | 1 | 2  | -3 |
| 1     |   | 1  | 3  |
| <hr/> |   |    |    |
|       | 1 | 3  | 0  |
| -3    |   | -3 |    |
| <hr/> |   |    |    |
|       | 1 | 0  |    |

Per tant les arrels són 1 i -3.

**S7. Exercicis: pàg. 63, ex. 28, 29, 30, 31.**

### 4. FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

1r Sempre que es pugui, traurem x factor comú.

2n Si el polinomi és de grau més gran que 2 apliquem la regla de Ruffini.

3r Si el polinomi és de grau igual a 2, resollem l'equació de segon grau.

4t Expressem com a producte de factors.

**Exemple 1:** Factoritza  $x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2$

1r Traiem factor comú la x:  $x^2(x^4 - 15x^2 - 42x - 40)$

2n Apliquem la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -15 & -42 & 40 \\ -2 & & -2 & 4 & 22 & 40 \\ \hline & 1x^3 & -2x^2 & -11x & -20 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -11 & -20 \\ 5 & & 5 & 15 & 20 \\ \hline & 1x^2 & +3x & +4 & 0 \end{array}$$

3r Quan el polinomi resultant és de grau igual a 2 resollem l'equació de segon grau:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

4t Expressem com a producte de factors.

$$x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2 = x^2(x + 2)(x - 5)(x^2 + 3x + 4)$$

**Exemple 2:** Factoritza  $2x^3 - x^2 - x$

1º Traiem factor comú la x:  $x(2x^2 - 1x - 1)$

2n Quan el polinomi resultant és de grau igual a 2 resollem l'equació de segon grau:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{4}{4} = 1 \\ -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

3r Expressem com a producte de factors.

$$2x^3 - x^2 - x = x(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = x(x - 1)(2x + 1)$$

**S8. Exercicis: pàg. 64, ex. 33; pàg. 65, ex. 36, 37.**

Exemple 3: Factoritza aplicant les igualtats notables:

- a.  $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$
- b.  $4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$
- c.  $x^4 + x^2 + 2x^3 = x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 + 2x + 1) = x^2(x + 1)^2$

**S9. Exercicis: pàg. 65, ex. 39; pàg. 71, ex. 104.**

## 5. FRACCIONS ALGEBRAIQUES

Una FRACCIÓ ALGEBRAICA és el quocient de dos polinomis.  $\frac{P(x)}{Q(x)}$

### 5.1 SIMPLIFICACIÓ

1r Factoritzem el numerador i denominador de la fracció algebraica.

2n Eliminem els factors repetits al numerador i al denominador.

Exemple: Simplifica  $\frac{3x^3 + 6x^2 + 3x}{6x^3 + 6x^2}$

1r Factoritzem

$$3x^3 + 6x^2 + 3x = 3x(x^2 + 2x + 1) = 3x(x + 1)^2$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \begin{cases} -\frac{2}{2} = -1 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

$$6x^3 + 6x^2 = 6x^2(x + 1)$$

2n Eliminem els factors repetits al numerador i al denominador.

$$\frac{3x^3 + 6x^2 + 3x}{6x^3 + 6x^2} = \frac{3x(x + 1)^2}{6x^2(x + 1)} = \frac{x + 1}{2x}$$

**S10. Exercicis: pàg. 66, ex. 41; pàg. 72, ex. 112.**

## 5.2 SUMA I RESTA

Per a SUMAR/RESTAR fraccions algebraiques es necessari reduir a comú denominador.

Exemple: Efectua l'operació

$$\frac{x+7}{x} - \frac{x^2-2}{x^2+x} + \frac{2x-1}{x+1}$$

1r Factoritzem els denominadors i calculem el mcm dels denominadors.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + x = x(x+1) \\ x+1 \end{array} \right\} mcm = x(x+1)$$

2n Reduïm a comú denominador.

$$\begin{aligned} \frac{x+7}{x} - \frac{x^2-2}{x^2+x} + \frac{2x-1}{x+1} &= \frac{(x+1)(x+7) - (x^2-2) + x(2x-1)}{x(x+1)} = \\ &= \frac{x^2 + 7x + x + 7 - x^2 + 2 + 2x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{2x^2 + 7x + 9}{x^2 + x} \end{aligned}$$

**S11. Exercicis: pàg. 67, ex. 45; pàg. 72, ex. 111.**

## 5.3 MULTIPLICACIÓ I DIVISIÓ

Exemple: Fes les operacions

a)  $\frac{2x}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x}$

1r Factoritzem i multipliquem en recte.  $\frac{2x}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x} = \frac{2x(x+2)(x-2)}{(x+2)x}$

2n Simplifiquem  $= \frac{2(x-2)}{1} = 2x - 4$

b)  $\frac{x^2}{x^2-25} : \frac{x}{x-5}$

1r Factoritzem i multipliquem en creu  $\frac{x^2}{x^2-25} : \frac{x}{x-5} = \frac{x^2(x-5)}{(x+5)(x-5)x}$

2n Simplifiquem  $= \frac{x}{x+5}$

**S12. Exercicis: pàg. 67, ex. 45; pàg. 72, ex. 112.**

## 5.4 OPERACIONS COMBINADES

Exemple: Calcula

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{3x-4}{2x} \right) \cdot \frac{6x}{6-2x} &= \left( \frac{2}{2x} + \frac{x}{2x} - \frac{3x-4}{2x} \right) \cdot \frac{6x}{6-2x} \\ &= \frac{2+x-3x+4}{2x} \cdot \frac{6x}{6-2x} = \frac{6-2x}{2x} \cdot \frac{6x}{6-2x} = \frac{2 \cdot (3-x) \cdot 2 \cdot 3 \cdot x}{2 \cdot x \cdot 2(3-x)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

**S13. Exercicis: pàg. 67, ex. 47; pàg. 72, ex. 113.**

**S14. Fitxa Polinomis.**

**S15. Fitxa Fraccions algebraiques.**

**S16. Pre-Examen 2. Polinomis i fraccions algebraiques**