

TEMA 12. PROBABILITAT

1. EXPERIMENTS ALEATORIS. SUCCESSOS

Un **EXPERIMENT ALEATORI** és aquell del qual no podem predir el resultat, es a dir, que depèn de la sort o de l'atzar.

Exemple: Llançar un dau i anotar la puntuació que ix.

Un **SUCCÉS ELEMENTAL** és cada un dels possibles resultats d'un experiment aleatori. El conjunt de tots els successos elementals s'anomena **ESPAI MOSTRAL**.

Exemple: Calcula l'espai mostral al llançar un dau i anotar la puntuació que ix.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Un **SUCCÉS SEGUR** és aquell que sempre ocorre, i un **SUCCÉS IMPOSSIBLE** és el que mai passa.

Exemple: Al llançar un dau:

Un succés segur serà "que isca un nombre natural menor que 7".

Un succés impossible serà "que isca un nombre natural major que 7".

Un **SUCCÉS COMPOST** està format per dos o més successos elementals.

Exemple: Al llançar un dau:

Un succés compost serà "que isca un nombre parell"

1.1 OPERACIONS AMB SUCCESSOS

La **UNIÓ** de dos successos, A i B, és un altre format per tots el successos elementals que hi ha en A o en B, $A \cup B$.

La **INTERSECCIÓ** de dos successos, A i B, és un altre succés format per tots els successos comuns de A i B, $A \cap B$.

Si $A \cap B \neq \emptyset$ els successos A i B són **COMPATIBLES**. En cas contrari són **INCOMPATIBLES**.

El **SUCCÉS CONTRARI** o **COMPLEMENTARI** d'un succés A és un succés, $\bar{A}$, que està format pels successos de l'espai mostral que no estan en A .

Exemple: Al llançar un dau i anotar la puntuació que ix considerem el successos següents:

A = Nombre parell, B =Múltiple de 3, C = Divisor de 5

Calcula $A \cup B, A \cap B, B \cup C, A \cap C, \bar{A}$

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\}, \quad C = \{1, 5\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

$$A \cap B = \{6\}$$

$$B \cup C = \{1, 3, 5, 6\}$$

$$A \cap C = \emptyset$$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

S1. Exercicis: pàg. 269, ex. 66, 67, 71, 72; pàg. 270, ex. 73, (74).

2. PROBABILITAT

La **PROBABILITAT D'UN SUCCÉS** és una funció que a cada succés d'un experiment aleatori associa un nombre entre 0 i 1, que indica la facilitat que el succés ocòrriga.

Un **EXPERIMENT** és **REGULAR** quan tots els successos tenen la mateixa probabilitat, són **EQUIPROBABLES**.

Exemple: Al llançar un dau la probabilitat de tots els successos es la mateixa, són equiprobables.

La **REGLA DE LAPLACE** afirma que la probabilitat d'un succés A es calcula:

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ de casos favorables a } A}{n^{\circ} \text{ total de casos possibles}}$$

Exemple: Fiquem en un pot 5 caramels: 1 de menta, 2 de llima i 2 de maduixa. Si triem un a l'atzar, quina és la probabilitat que siga de menta? I de llima? I de maduixa?

$$P(\text{menta}) = \frac{1}{5} = 0.2, P(\text{llima}) = \frac{2}{5} = 0.4, P(\text{mentax}) = \frac{2}{5} = 0.4$$

S2. Exercicis: pàg. 263, ex. 26, 27, 28, 29; pàg. 270, ex. 80.

Exemple: Agafem a l'atzar una carta d'una baralla espanyola de 40 cartes. Si considerem els successos:

A= Agafar oros.

B=Agafar una figura.

Descriu i calcula'n la probabilitat de $A, B, A \cup B, A \cap B$

$$A = \{1 - 7 \text{ d'or}, \text{Sota d'r}, \text{cavall d'or}, \text{rei d'or}\} \rightarrow P(A) = \frac{10}{40} = 0.25$$

$$B = \{S, C, R \text{ d'or}; S, C, R \text{ de copes}; S, C, R \text{ d'espases}; S, C, R \text{ de bastos}\} \rightarrow$$

$$P(B) = \frac{12}{40} = 0.3$$

$$A \cup B = \{1 - 7 \text{ d'or}, 12 \text{ figures}\} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{19}{40} = 0.475$$

$$A \cap B = \{S, C, R \text{ d'or}\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{40} = 0.075$$

S3. Exercicis: pàg. 264, ex. 30; pàg. 265, ex. 32, 33, 34.

3. PROPIETATS DE LA PROBABILITAT

- La probabilitat no pot ser menor que 0 ni major que 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- La probabilitat d'un succés segur és 1 i la d'un succés impossible és 0.

$$P(E) = 1, P(\emptyset) = 0$$

- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- Quan dos successos són incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Per a dos successos qualssevol, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Només el succés A: $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$
- $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

Exemple: Dels 25 estudiants que hi ha en la classe de 4rt d'ESO, 20 van aprovar la primera avaluació, 17 la segona i 15 les dues. Calcula:

- a) Probabilitat de que no haja aprovat la primera avaluació.
- b) Probabilitat de que haja aprovat alguna avaluació.
- c) Probabilitat de que haja aprovat només la primera avaluació.
- a) Definim els successos:

$A = \text{Aprovar la primera avaluació}, \bar{A} = \text{suspendre la primera avaluació}$

$B = \text{Aprovar la segona avaluació}, \bar{B} = \text{suspendre la segona avaluació}$

$$P(A) = \frac{20}{25} = 0,8$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2$$

- b) $A \cup B = \text{aprovar alguna avaluació}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B) = \frac{17}{25} = 0,68, \quad P(A \cap B) = \frac{15}{25} = 0,6$$

$$P(A \cup B) = 0,8 + 0,68 - 0,6 = 0,88$$

- c) $A \cap \bar{B} = \text{aprovar només la primera avaluació}$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,8 - 0,6 = 0,2$$

S4. Exercicis: pàg. 265, ex. 35; Fitxa Problemes de Probabilitat, ex. 1, 2, 3.

4. PROBABILITAT CONDICIONADA

El càlcul de la probabilitat d'un succés B, quan sabem que ha ocorregut un altre succés A, s'anomena **PROBABILITAT CONDICIONADA**, $P(B|A)$.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Les **TAULES DE CONTINGÈNCIA** són especialment útils per resoldre problemes quan coneixem la probabilitat d'intersecció.

	B	$\bar{B}$	$TOTAL$
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
$TOTAL$	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Exemple: A una excursió van 10 xics i 15 xiques. Porten botes 8 xics i 10 xiques. Si triem una persona a l'atzar. Troba la probabilitat que:

- a) No porte botes i siga xic.
- b) No porte botes o siga xic.
- c) Siga xica, sabent que porta botes.

1r Escribim les dades conegudes.

$$P(Xic) = \frac{10}{25} = 0,4 \quad P(Xica) = \frac{15}{25} = 0,6$$

$$P(Botes \cap Xic) = \frac{8}{25} = 0,32 \quad P(Botes \cap Xica) = \frac{10}{25} = 0,4$$

2n Completem la taula de contingència.

	Botes	No botes	Total
Xic	0,32	0,08	0,4
Xica	0,4	0,2	0,6
Total	0,72	0,28	1

3n Responem les preguntes.

- a) No porte botes i siga xic.

$$P(\overline{Botes} \cap Xic) = 0,08$$

- b) No porte botes o siga xic.

$$\begin{aligned} P(\overline{Botes} \cup Xic) &= P(\overline{Botes}) + P(Xic) - P(\overline{Botes} \cap Xic) \\ &= 0,28 + 0,4 - 0,08 = 0,6 \end{aligned}$$

- c) Siga xica, sabent que porta botes.

$$P(Xica|Botes) = \frac{P(Xica \cap Botes)}{P(Botes)} = \frac{0,4}{0,72} = 0,56$$

S5. Exercicis: pàg. 266, ex. 37, 38; pàg. 272, ex. 94, 107.

5. EXPERIMENTS COMPOSTOS

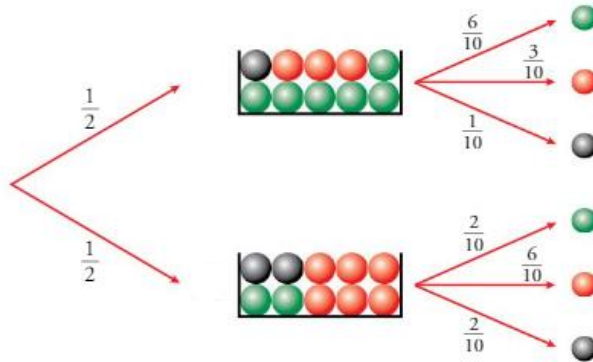
Els **DIAGRAMES D'ARBRE** són especialment útils per resoldre problemes d'experiments compostos.

Exemple: Tenim dues urnes amb boles, la primera conté 6 boles verdes, 3 roges i una negra i la segona conté 2 verdes, 6 roges i 2 negres. Triem una de les urnes a l'atzar i extraiem una bola. Dibuixa el diagrama d'arbre i calcula.

a. La probabilitat que la bola siga verda.

b. Si la bola es verda, quina és la probabilitat que l'hàgem extret de la primera urna?

1r Dibuixem el diagrama d'arbre



2n Responem les preguntes.

$$a) P(\text{Verda}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$b) P(\text{Primera urna}|\text{verda}) = \frac{P(\text{Primera urna} \cap \text{verda})}{P(\text{verda})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}}{0,4} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

S6. Exercicis: pàg. 272, ex. 93, 95, 99, 101, 103.

S7-S8. Exercicis: Repàs. Fitxa Problemes de Probabilitat.

S9. Exercicis. Repàs. Fitxa Pre-Examen 8. Probabilitat