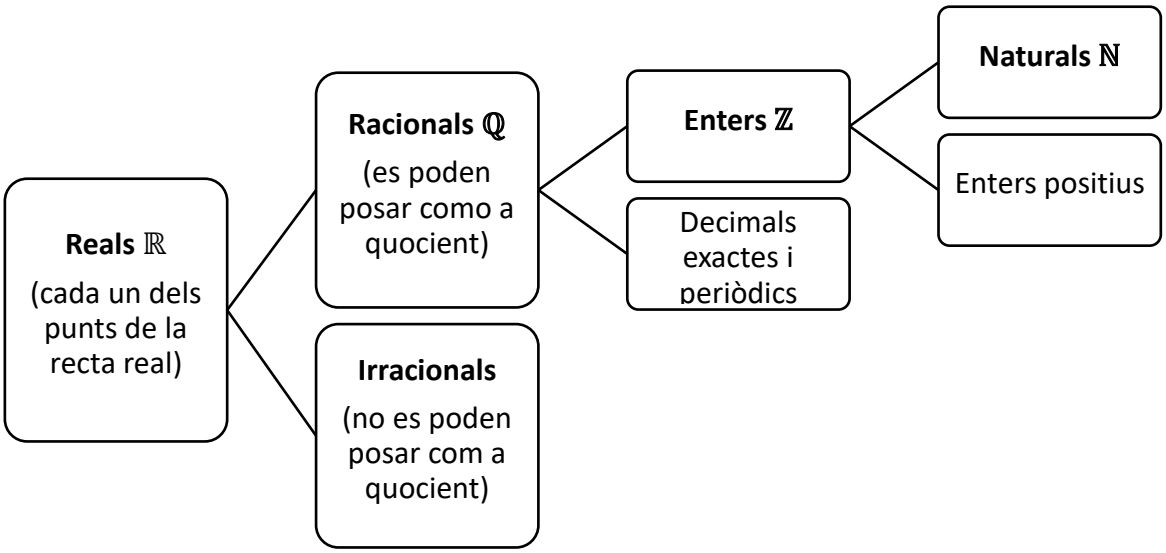
TEMA 1. NOMBRES REALS

1. NOMBRES REALS. LA RECTA REAL



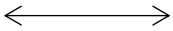
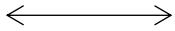
Exemple: Classifica els següents nombres:

$$5{,}87;\ 4;\ -3;\ 0;\ \pi;\ \frac{24}{6};\ \frac{1}{2};\ \sqrt{3};\ 3{,}1\hat{2};\ \phi$$

S1. Exercicis: pàg. 10, ex. 1; pàg. 11, ex. 5, 7; pàg. 13, ex. 11, 12.

Clara Benedicto Baldonado

2. INTERVALS I SEMIRECTES

Nom	Interval	Desigualtat	Descripció	Representació
Interval obert	(a, b)	$a < x < b$	Nombres compresos entre a i b	
Interval tancat	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	Nombres compresos entre a i b, ambdós inclosos	
Interval semiobert	$(a, b]$	$a < x \leq b$	Nombres compresos entre a i b, incloent-hi b però no a	
	$[a, b)$	$a \leq x < b$	Nombres compresos entre a i b, incloent-hi a però no b	
Semirectes	$(-\infty, a)$	$x < a$	Nombres menors que a	
	$(-\infty, a]$	$x \leq a$	Nombres menors o igual que a	
	$(a, +\infty)$	$x > a$	Nombres majors que a	
	$[a, +\infty)$	$x \geq a$	Nombres majors o igual que a	
Recta	$(-\infty, +\infty)$	$-\infty < x < \infty$	Tots els nombres reals	

Exemples:

Interval	Desigualtat	Representació
	$0 < x < 1$	
$[2, 3]$		
		-2 0
	$x < 1$	
$[-1, +\infty)$		

2.1 UNIÓ I INTERSECCIÓ D'INTERVALS

1r Representem els intervals sobre la mateixa recta

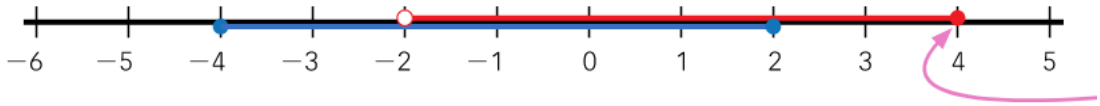
2n Troben la unió i la intersecció dels intervals

La UNIÓ ($A \cup B$) dels intervals serà tota la part de la recta que ocupen els intervals.

La INTERSECCIÓ de dos intervals és l'interval format pels elements comuns als dos intervals, $A \cap B$. La intersecció d'intervals pot ser buida $\emptyset$, un punt o un interval.

Exemples: Troba la unió i la intersecció dels parells d'intervals.

a. $A = [-4, 2], B = (-2, 4]$

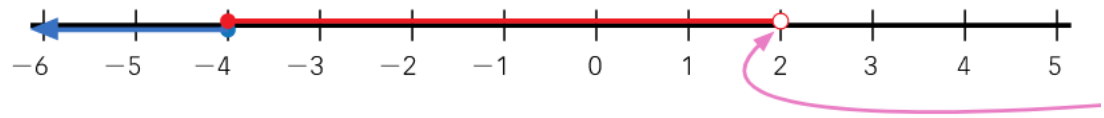


$$A \cup B = [-4, 4], A \cap B = (-2, 2]$$

b. $A = [-3, 5], B = (-3, +\infty)$

$$A \cup B = [-3, +\infty), A \cap B = (-3, 5]$$

c. $A = (-\infty, -4], B = [-4, -2)$



$$A \cup B = (-\infty, 2), A \cap B = \{-4\}$$

d. $A = (-\infty, 2], B = (2, 4]$

$$A \cup B = (-\infty, 4], A \cap B = \emptyset$$

S2. Exercicis: pàg. 16, ex. 20, 21; pàg. 17, ex. 23; pàg. 25, ex. 78, 79, 85.

(Joc pàg. 25, ex. 82)

3. POTÈNCIES

$$a^n = a \cdot \cdots \cdot a$$

1. $a^0 = 1 \quad a^1 = a$

2. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

4. Si $a > 0$

- $(-a)^{PARELL} > 0$
- $(-a)^{IMPARELL} < 0$
- $-a^{PARELL} < 0$
- $-a^{IMPARELL} < 0$

5. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

6. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Exemples:

a. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

b. $\left(\frac{2}{-3}\right)^{-1} = \left(\frac{-3}{2}\right)^1 = -\frac{3}{2}$

c. $(-5)^3 = -125$

d. $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$

e. $-4^{-2} = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$

f. $(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^5 = -32$

g. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1024}{243}$

h. $(8^{-3} : 4^{-3})^2 = (2^{-3})^2 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

i. $\left(\frac{6}{25}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^3 = \left(\frac{2 \cdot 3}{5^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 5}{3^2}\right)^3 = \frac{2^2 \cdot 3^2}{5^4} \cdot \frac{2^3 \cdot 5^3}{3^6} = \frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3}{5^4 \cdot 3^6} = \frac{2^5}{5 \cdot 3^4} = \frac{32}{405}$

S3. Exercicis: pàg. 32, ex. 2, 3; pàg. 33, ex. 6, 7; pàg. 46, ex. 57, 59, 62; pàg. 47, ex. 68.

4. ARRELS I RADICALS

Es diu ARREL N-ÉSIMA d'un nombre $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$.

$$a\ es\ el\ radicand\ i\ n\ l'índex$$

- Si $a < 0$, només existeixen les seus arrels d'índex imparell.
- Si $a < 0$, les arrels d'índex parell tenen dues solucions, una positiva i una negativa.

4.1 POTÈNCIA D'UN RADICAL

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{m \cdot p}}$$

Exemple: $\left(\sqrt{2^3}\right)^3 = \sqrt{2^9}$

4.2 ARREL D'UN RADICAL

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Exemple: $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$

4.3 FORMA EXPONENCIAL DELS RADICALS

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\quad$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Exemples Expressa en forma exponencial:

a. $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{5}{6}}$

b. $\left(\sqrt[6]{y^2}\right)^3 = \sqrt[6]{y^6} = y^{\frac{6}{6}} = y$

c. $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

d. $\left(\sqrt[6]{27}\right)^2 = \left(\sqrt[6]{3^3}\right)^2 = \sqrt[6]{3^6} = 3^{\frac{6}{6}} = 3$

Exemples: Posa la potència en forma d'arrel:

a. $3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4}$

b. $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$

4.4 SIMPLIFICACIÓ DE RADICALS

Expressant els radicals en forma de potència de vegades es poden simplificar.

Exemple: Simplifica

$$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

S4. Exercicis: pàg. 40, ex. 28, 29; pàg. 41, ex. 34, 35; pàg. 49, ex. 103, 104, 105

4.5 PRODUCTE I QUOCIENT DE RADICALS

Per a MULTIPLICAR i DIVIDIR radicals és necessari el mateix índex. Per aconseguir el mateix índex calculem el mínim comú múltiple del índexs i reduïm a igual índex.

Exemples:

a. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{27 \cdot 4} = \sqrt[6]{108}$

b. $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{32}} = \frac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{\sqrt[6]{2^8}}{\sqrt[6]{2^5}} = \sqrt[6]{\frac{2^8}{2^5}} = \sqrt[6]{2^3}$

c. $\left(5\sqrt{3} - 7\sqrt{2}\right) \cdot \left(3 - 2\sqrt{3}\right) = 15\sqrt{3} - 10\sqrt{3^2} - 21\sqrt{2} + 14\sqrt{6} = 15\sqrt{3} - 30 - 21\sqrt{2} + 14\sqrt{6}$

d. $\left(4\sqrt{3} - \sqrt{7}\right)^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 16 \cdot 3 - 8\sqrt{3} + 7 = 63 - 8\sqrt{3}$

S5. Exercicis: pàg. 41, ex. 32, 33; pàg. 43, ex. 44; pàg. 50, ex. 117, 119, 120, 122 a, b.

4.6 EXTRACCIÓ DE FACTORS FORA D'UNA ARREL

Exemple: Extrau del radical els factors que siga possible:

$$\sqrt[3]{48a^5b^3} =$$

1º Factoritzem

$$= \sqrt[3]{2^4 \cdot 3 \cdot a^5 \cdot b^3}$$

2º Agrupem fent grups de tants elements com indica l'índex

$$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^3}$$

3º Per cada grup complet extraiem fora un factor

$$= 2ab\sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot a^2} = 2ab\sqrt[3]{6a^2}$$

4.7 SUMA I RESTA DE RADICALS

Només podem SUMAR i RESTAR radicals idèntics, amb mateix radicand i mateix índex. Per aconseguir radicands idèntics haurem de traure els factors que puguem fora de les arrels.

Exemple 1: Calcula $\sqrt{32}+2\sqrt{18}-3\sqrt{50}=$

1º Factoritzem els radicands

$$=\sqrt{2^5}+2\sqrt{3^2\cdot 2}-3\sqrt{5^2\cdot 2}$$

2º Extraiem els factors que puguem fora

$$=2^2\sqrt{2}+2\cdot 3\sqrt{2}-3\cdot 5\sqrt{2}$$

3º Multipliquem el factors de fora de les arrels

$$=4\sqrt{2}+6\sqrt{2}-15\sqrt{2}$$

4º Sumem/restem el factors de fora de les arrels

$$=-5\sqrt{2}$$

Exemple 2: Calcula $\sqrt{\frac{8}{36}}-\sqrt{\frac{18}{25}}+\sqrt{50}=\sqrt{\frac{2^3}{2^2\cdot 3^2}}-\sqrt{\frac{2\cdot 3^2}{5^2}}+\sqrt{2\cdot 5^2}=$

$$=\frac{2}{2\cdot 3}\sqrt{2}-\frac{3}{5}\sqrt{2}+5\sqrt{2}=\frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{3}{5}\sqrt{2}+5\sqrt{2}=\left(\frac{5}{15}-\frac{9}{15}+\frac{75}{15}\right)\sqrt{2}=\frac{71}{15}\sqrt{2}$$

S6. Exercicis: pàg. 42, ex. 37, 40; pàg. 43, ex. 41, 42; pàg.49, ex. 111, 112; pàg. 50, ex. 115

S7. Fitxa Radicals

5. RACIONALITZACIÓ

RACIONALITZAR és el procés pel qual fem desaparèixer els radicals del denominador.

CAS 1. ARRELS QUADRADES.

Multipliquem el numerador i el denominador per l'arrel del denominador.

Exemple: Racionalitza

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

CAS 2. ALTRES ARRELS

Multipliquem el numerador i el denominador per una arrel que complete l'índex de l'arrel inicial.

Exemple: Racionalitza

$$\frac{3}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3}} = \frac{3\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{3\sqrt[5]{7^3}}{7}$$

CAS 3. SUMES I RESTES D'ARRELS

Multipliquem el numerador i el denominador pel conjugat del denominador.

Exemple: Racionalitza

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$$
$$= \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

S8. Exercicis: pàg. 45, ex. 49, 50; pàg. 50, ex. 126, 127, 128, 129.

6. LOGARÍTMES

S'anomena LOGARÍTME en base a de b, $log_a b$, l'exponent a què cal elevar la base a per a obtindre b.

$$log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$$

Logaritme decimal: $\log b = log_{10} b$

Logaritme neperià $\ln b = ln_e b$

Exemples: Calcula els logaritmes següents:

a. $log_2 16$ Expressem 16 com una potència de 2 $\rightarrow 16 = 2^4 \rightarrow log_2 16 = 4$

b. $log_6 36$ Expressem 36 com una potència de 6 $\rightarrow 36 = 6^2 \rightarrow log_6 36 = 2$

c. $log\ 0{,}01$ Expressem 0,01 com una potència de 10 $\rightarrow 0{,}01 = 10^{-2} \rightarrow$

$\log 0{,}01 = -2$

d. $ln\frac{1}{e^3}$ Expressem $\frac{1}{e^3}$ com una potència de $e \rightarrow$

$\frac{1}{e^3} = e^{-3} \rightarrow ln\frac{1}{e^3} = -3$

6.1 PROPIETATS DELS LOGARÍTMES

1. $log_a a = 1$
2. $log_a 1 = 0$
3. $log_a(P \cdot Q) = log_a P + log_a Q$
4. $log_a\left(\frac{P}{Q}\right) = log_a P - log_a Q$
5. $log_a P^k = k log_a P$
6. $log_a \sqrt[k]{P} = \frac{1}{k} log_a P$

Exemples: Resol les operacions següents amb logaritmes:

a. $log_5 1 + 2log_5 5 = 0 + 2 \cdot 1 = 2$

b. $log_2 24 - log_2 6 = log_2 \frac{24}{6} = log_2 4 = log_2 2^2 = 2 \cdot log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$

S9. Exercicis: pàg. 36, ex. 14; pàg. 37, ex. 17; pàg. 48, ex. 86, 87, 91.

6.2 EQUACIONS LOGARITMIQUES

$$log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$$

Exemples: Troba el valor de la incògnita en cada cas:

c. $log_5 125 = x \quad 5^x = 125 = 5^3 \quad x = 3$

d. $log_2 \frac{1}{64} = x \quad 2^x = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6} \quad x = -6$

e. $log_x 81 = 4 \quad x^4 = 81 = 3^4 \quad x = 4$

S10. Exercicis: pàg. 38, ex. 20, 21, 22; pàg.48, ex. 88.

S11. Fitxa Logaritmes

S12. Pre-Examen 1. Nombres Reals

S13. Examen 1. Nombres Reals