

TEMA 13. PROBABILIDAD

1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

1.1 DEFINICIONES

Un **EXPERIMENTO ALEATORIO** es aquel del que no podemos predecir el resultado, es decir, que depende de la suerte o del azar.

Ejemplo: Lanzar un dado y anotar la puntuación que sale.

Un **SUCESO ELEMENTAL** es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio. El conjunto de todos los sucesos elementales se denomina **ESPACIO MUESTRAL**.

Ejemplo: Calcular el espacio muestral al lanzar un dado y anotar la puntuación que sale.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Un **SUCESO SEGURO** es aquel que siempre ocurre, y un **SUCESO IMPOSIBLE** es lo que nunca pasa.

Ejemplo: Al lanzar un dado:

Un suceso seguro será "que sea un número natural menor que 7".

Un suceso imposible será "que sea un número natural mayor que 7".

Un **SUCESO COMPUESTO** está formado por dos o más sucesos elementales.

Ejemplo: Al lanzar un dado:

Un suceso compuesto será "que sea un número par"

1.2 OPERACIONES CON SUCESOS

La **UNIÓN** de dos sucesos, A y B, es otro formado por todos los sucesos elementales que hay en A o en B, $A \cup B$.

La **INTERSECCIÓN** de dos sucesos, A y B, es otro suceso formado por todos los sucesos comunes de A y B, $A \cap B$.

Dos sucesos A y B son **COMPATIBLES** si $A \cap B \neq \emptyset$. En caso contrario son **INCOMPATIBLES**.

El **SUCESO CONTRARIO** o **COMPLEMENTARIO**, $\bar{A}$, de un suceso A es un suceso, que está formado por los sucesos del espacio muestral que no están en A.

Ejemplo: Al lanzar un dado y anotar la puntuación que se consideramos los siguientes sucesos:

A= Número par, B=Múltiple de 3, C= Divisor de 5

Calcula $A \cup B, A \cap B, B \cup C, A \cap C, \bar{A}$

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\}, \quad C = \{1, 5\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

$$A \cap B = \{6\}$$

$$B \cup C = \{1, 3, 5, 6\}$$

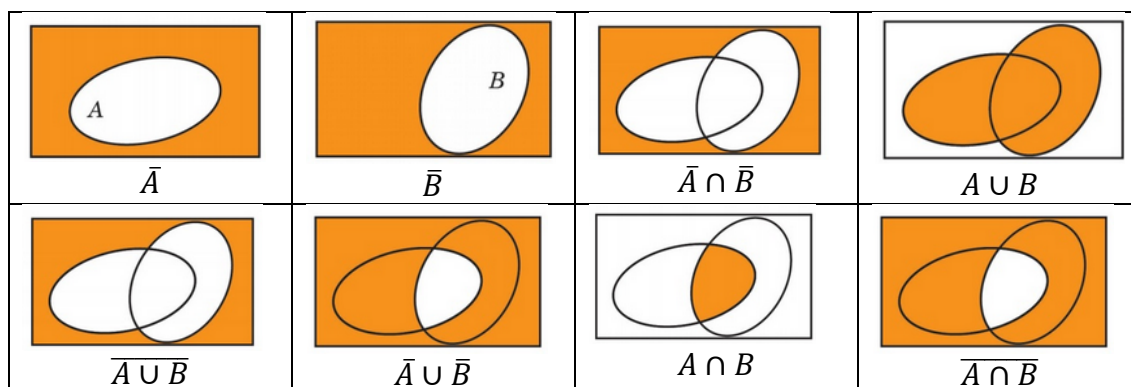
$$A \cap C = \emptyset$$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

1.3 PROPIEDADES

$$1 \quad \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$$

$$2 \quad \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$



S1. Ejercicios: pág. 336, ej. 17, 18, 19; pág. 346, ej. 44, 45, 46.

2. PROBABILIDAD

La **PROBABILIDAD DE UN SUCESO** es una función que en cada suceso de un experimento aleatorio asocia un número entre 0 y 1, que indica la facilidad que el suceso ocurre.

La **REGLA DE LAPLACE** afirma que la probabilidad de un suceso A se calcula:

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ de casos favorables a } A}{n^{\circ} \text{ total de casos posibles}}$$

Ejemplo 1: Metemos en un bote 5 caramelos: 1 de menta, 2 de lima y 2 de fresa. Si escogemos uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga de menta? ¿Y de lima? ¿Y de fresa?

$$P(\text{menta}) = \frac{1}{5} = 0.2, , P(\text{llima}) = \frac{2}{5} = 0.4 P(\text{menta}) = \frac{2}{5} = 0.4$$

Ejemplo 2: Cogemos al azar una carta de una baraja española de 40 cartas. Si consideramos los sucesos:

A= Coger oros.

B=Coger una figura.

Describe y calcula la probabilidad de A, B, $A \cup B$, $A \cap B$

$$A = \{1 - 7 \text{ de oro}, \text{Sota de oro}, \text{caballo de oro}, \text{rey de oro}\} \rightarrow P(A) = \frac{10}{40} = 0.25$$

$$B = \{S, C, R \text{ de oro}; S, C, R \text{ de copas}; S, C, R \text{ de espadas}; S, C, R \text{ de bastos}\} \rightarrow$$

$$P(B) = \frac{12}{40} = 0.3$$

$$A \cup B = \{1 - 7 \text{ de oro}, 12 \text{ figuras}\} \rightarrow P(A \cup b) = \frac{19}{40} = 0.475$$

$$A \cap B = \{S, C, R \text{ de oro}\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{40} = 0.075$$

2.1 PROPIEDADES

- La probabilidad no puede ser menor que 0 ni mayor que 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- La probabilidad de un suceso seguro es 1 y la de un suceso imposible es 0.

$$P(E) = 1, P(\emptyset) = 0$$

- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- Cuando dos sucesos son incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Para dos sucesos cualesquiera, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Sólo el suceso A: $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Ejemplo: De los 25 estudiantes que hay en la clase de 4º de ESO, 20 aprobaron la primera evaluación, 17 la segunda y 15 las dos. Calcula:

- Probabilidad de que no haya aprobado la primera evaluación.
- Probabilidad de que haya aprobado alguna evaluación.
- Probabilidad de que haya aprobado sólo la primera evaluación.
- Definimos los sucesos:

$A = \text{Aprobar la 1ª evaluación}, \bar{A} = \text{suspender la 1ª evaluación}$

$B = \text{Aprobar la 2ª evaluación}, \bar{B} = \text{suspender la 2ª evaluación}$

$$P(A) = \frac{20}{25} = 0,8$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2$$

- $A \cup B = \text{aprobar alguna evaluación}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B) = \frac{17}{25} = 0,68, \quad P(A \cap B) = \frac{15}{25} = 0,6$$

$$P(A \cup B) = 0,8 + 0,68 - 0,6 = 0,88$$

- $A \cap \bar{B} = \text{aprobar solo la primera evaluación}$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,8 - 0,6 = 0,2$$

S2. Ejercicios: pág. 337, ej. 21, 22, 23, 24; pág. 346, ej. 47, 49, 50; pág. 347, ej.51.

3. PROBABILIDAD CONDICIONADA

El cálculo de la probabilidad de un suceso B, cuando sabemos que ha ocurrido otro suceso A, se llama PROBABILIDAD CONDICIONADA, $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo: Al lanzar un dado, llamamos A=obtener un número par y B=obtener un múltiplo de 3. Calcula la probabilidad de que sea par si es múltiplo de 3.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dos sucesos A y B son **INDEPENDIENTES** si $P(A|B) = P(A)$ y $P(B|A) = P(B) \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

4. TABLAS DE CONTINGENCIA

	B	$\bar{B}$	$TOTAL$
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
$TOTAL$	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

4.1 DADO LA PROBABILIDAD DE INTERSECCIÓN

Las **TABLAS DE CONTINGENCIA** son especialmente útiles para resolver problemas cuando conocemos la probabilidad de intersección.

Ejemplo: A una excursión van 10 chicos y 15 chicas. Llevan botas 8 chicos y 10 chicas. Si escogemos a una persona al azar. Encuentra la probabilidad de que:

1. No lleve botas y sea chico.
2. No lleve botas o sea chico.
3. Sea chica, sabiendo que lleva botas.

1º Escribimos los datos conocidos.

$$P(Chico) = \frac{10}{25} = 0,4 \quad P(Chica) = \frac{15}{25} = 0,6$$

$$P(Botas \cap Chico) = \frac{8}{25} = 0,32 \quad P(Botas \cap Chica) = \frac{10}{25} = 0,4$$

2º Completamos la tabla de contingencia.

	Botas	No botas	Total
Chico	0,32	0,08	0,4
Chica	0,4	0,2	0,6
Total	0,72	0,28	1

3º Respondemos las preguntas.

1. No lleve botas y sea chica.

$$P(\overline{Botes} \cap Xic) = 0,08$$

2. No lleve botas o sea chica.

$$\begin{aligned} P(\overline{Botes} \cup Xic) &= P(\overline{Botes}) + P(Xic) - P(\overline{Botes} \cap Xic) \\ &= 0,28 + 0,4 - 0,08 = 0,6 \end{aligned}$$

3. Sea chica, sabiendo que lleva botas.

$$P(Xica|Botes) = \frac{P(Xica \cap Botes)}{P(Botes)} = \frac{0,4}{0,72} = 0,56$$

4.2 DADO LA PROBABILIDAD CONDICIONADA

Cuando conocemos las probabilidades condicionadas también se pueden utilizar tablas de contingencia pero para completar las tablas es necesario primer utilizar las fórmulas.

Ejemplo: El 60% de los alumnos de Bachillerato son chicas y el 40% son chicos. La mitad de los chicos lee asiduamente la revista COMIC, mientras que sólo el 30% de las chicas la lee.

- a) Obtén la probabilidad de que un alumno lea la revista.
- b) Si un alumno nos dice que no lee la revista, obtén la probabilidad de que sea chico.

1º Escribimos los datos conocidos:

$A = \text{chica}, \bar{A} = \text{chico}, L = \text{Lee la revista}, \bar{L} = \text{No lee la revista}$

$$P(A) = 0,6, P(\bar{A}) = 0,4, P(L|\bar{A}) = 0,5, P(L|A) = 0,3$$

2º Utilizamos las fórmulas para completar la tabla de contingencia.

$$P(L|\bar{A}) = \frac{P(L \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \rightarrow P(L \cap \bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(L|\bar{A}) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,20$$

$$P(L|A) = \frac{P(L \cap A)}{P(A)} \rightarrow P(L \cap A) = P(A) \cdot P(L|A) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$$

	L	$\bar{L}$	$TOTAL$
A	0,18	$0,6 - 0,18 = 0,42$	0,6
$\bar{A}$	0,2	$0,4 - 0,2 = 0,2$	0,4
$TOTAL$	$0,18 + 0,2 = 0,38$	$1 - 0,38 = 0,62$	1

3º Respondemos las preguntas:

a) $P(L) = P(L \cap A) + P(L \cap \bar{A}) = 0,18 + 0,2 = 0,38$

b) $P(A|\bar{L}) = \frac{P(A \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{0,42}{0,62} = 0,677$

S3. Ejercicios: pág. 340, ex. 31, 32; pág. 347, ex. 56, 57.

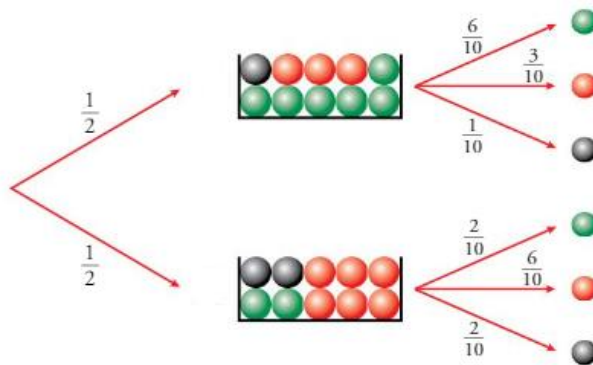
5. PROBABILIDAD COMPUESTA

Los **DIAGRAMAS DE ÁRBOL** son especialmente útiles para resolver problemas de experimentos compuestos.

Ejemplo: Tenemos dos urnas con bolas, la primera contiene 6 bolas verdes, 3 rojas y una negra y la segunda contiene 2 verdes, 6 rojas y 2 negras. Escogemos una de las urnas al azar y extraemos una bola. Dibuja el diagrama de árbol y calcula.

- a) La probabilidad de que la bola siga verde.
- b) Si la bola se verde, ¿cuál es la probabilidad de que la hayamos extraído de la primera urna?

1º Dibujamos el diagrama de árbol



2º Respondemos a las preguntas.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{Verde}) &= P(\text{Urna 1}) \cdot P(\text{Verde}|\text{Urna 1}) + P(\text{Urna 2}) \cdot \\ &P(\text{Verde}|\text{Urna 2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{5} = 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\text{Urna 1}|\text{Verde}) &= \frac{P(\text{Urna 1} \cap \text{Verde})}{P(\text{Verde})} = \frac{P(\text{Urna 1}) \cdot P(\text{Urna 1}|\text{Verde})}{P(\text{Verde})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}}{0,4} = \frac{0,3}{0,4} = \\ &0,75 \end{aligned}$$

S4. Ejercicios: pág. 347, ej. 58, 60, 61; pág. 348, ej. 77.