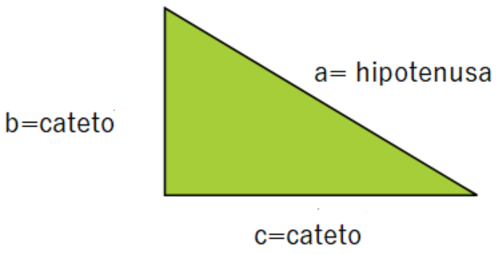
TEMA 10 y 11. GEOMETRÍA

1. TEOREMA DE PITÁGORAS

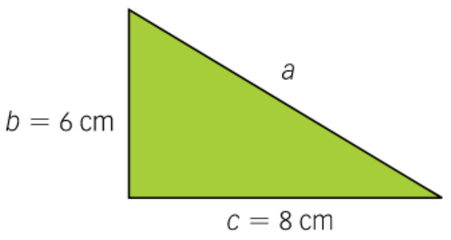
1.1 TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



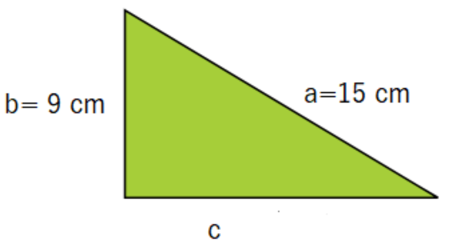
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ejemplo 1: Determina la longitud de la hipotenusa un triángulo rectángulo con catetos de 6 cm y 8 cm.



$$a^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow a^2 = 36 + 64 \rightarrow a^2 = 100 \rightarrow$$
$$a = \sqrt{100} \rightarrow a = 10\ cm$$

Ejemplo 2: Halla el cateto que falta.



$$15^2 = 9^2 + b^2 \rightarrow 225 = 81 + b^2 \rightarrow$$
$$b^2 = 225 - 81 \rightarrow b^2 = 144$$
$$b = \sqrt{144} \rightarrow b = 12\ cm$$

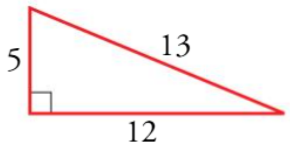
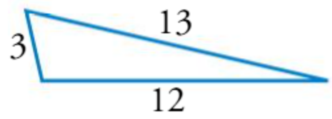
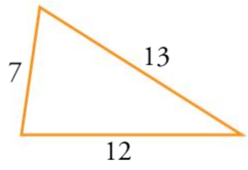
1.2 CLASIFICACIÓN DE UN TRIÁNGULO

Sean a, b, c son los lados de un triángulo y a es el mayor:

- Si $b^2 + c^2 = a^2$, el triángulo es rectángulo.
- Si $b^2 + c^2 < a^2$, el triángulo es obtusángulo.
- Si $b^2 + c^2 > a^2$, el triángulo es acutángulo.

Clara Benedicto Baldonado

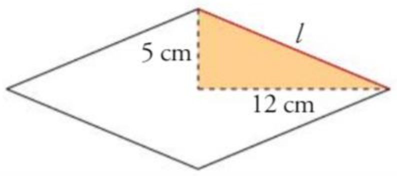
Ejemplo: Clasifica los siguientes triángulos:

		
$5^2 + 12^2 = 13^2$	$3^2 + 12^2 = 13^2$	$7^2 + 12^2 = 13^2$
$25 + 144 = 169$	$9 + 144 = 169$	$49 + 144 = 169$
$169 = 169$	$153 < 169$	$193 > 169$
Triángulo rectángulo	Triángulo obtusángulo	Triángulo acutángulo

S1: Ejercicios: pág. 213, ej. 1, 2, 3.

2. APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Ejemplo 1: Calcula el lado del rombo.



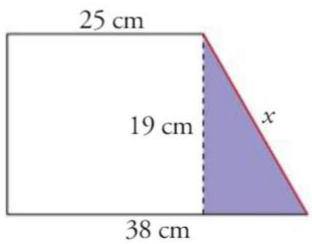
Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$l^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow l^2 = 25 + 144$$

$$\rightarrow l^2 = 169 \rightarrow$$

$$l = \sqrt{169} \rightarrow l = 13\ cm$$

Ejemplo 2: Calcula la longitud del lado oblicuo del trapecio.



Calculamos el cateto del triángulo rectángulo:

$$38 - 25 = 13\ cm$$

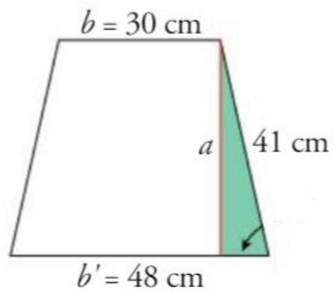
Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 19^2 + 13^2 \rightarrow x^2 = 361 + 169$$

$$\rightarrow x^2 = 530 \rightarrow$$

$$x = \sqrt{530} \rightarrow x \approx 23{,}02\ cm$$

Ejemplo 3: Calcula la altura del trapecio isósceles.



Calculamos el cateto del triángulo rectángulo:

$$48 - 30 = 18 \rightarrow 18 : 2 = 9\ cm$$

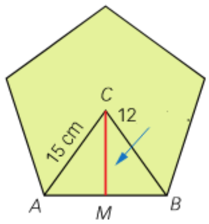
Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$41^2 = a^2 + 9^2 \rightarrow 1681 = a^2 + 81$$

$$\rightarrow a^2 = 1681 - 81 \rightarrow a^2 = 1600$$

$$a = \sqrt{1600} \rightarrow a = 40\ cm$$

Ejemplo 4: Calcula el lado del pentágono regular de radio 15 cm y apotema 12 cm.



Aplicamos el Teorema de Pitágoras para calcular la mitad del lado:

$$15^2 = x^2 + 12^2 \rightarrow 225 = x^2 + 144$$

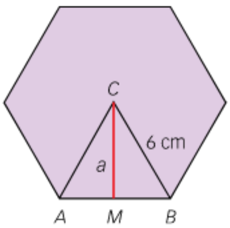
$$\rightarrow x^2 = 225 - 144 \rightarrow x^2 = 81$$

$$x = \sqrt{81} \rightarrow x = 9\ cm$$

Calculamos el lado.

$$lado = 9 \cdot 2 = 18\ cm$$

Ejemplo 5: Calcula la apotema del hexágono regular de lado 6 cm.



NOTA: Un hexágono regular se divide en 6 triángulos equiláteros y por tanto el radio=lado.

Calculamos el cateto del triángulo rectángulo:

$$6 : 2 = 3\ cm$$

Aplicamos el Teorema de Pitágoras para calcular la mitad del lado:

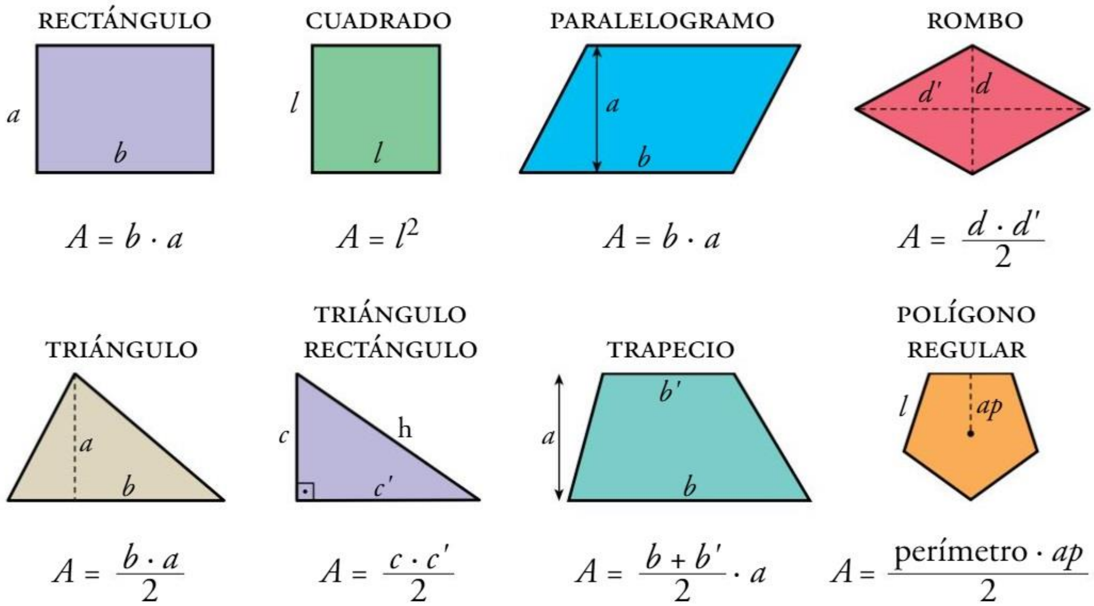
$$6^2 = a^2 + 3^2 \rightarrow 36 = a^2 + 9$$

$$\rightarrow a^2 = 36 - 9 \rightarrow a^2 = 27$$

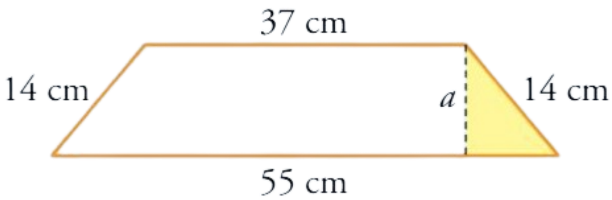
$$a = \sqrt{27} \rightarrow a \approx 5{,}2\ cm$$

S2. Ejercicios: pág. 219, ej. 5; pág. 221, ej. 21.

3. ÁREAS DE POLÍGONOS



<u>Ejemplo:</u> Halla el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 37 cm y 55 cm y lado oblicuo 14 cm.



Calculamos el cateto del triángulo rectángulo:

$$55 - 37 = 18 \rightarrow 18 : 2 = 9\ cm$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura:

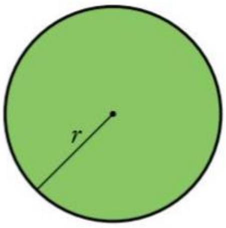
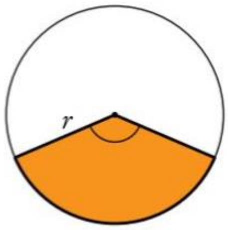
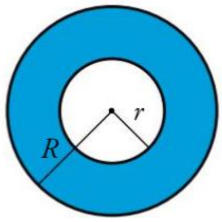
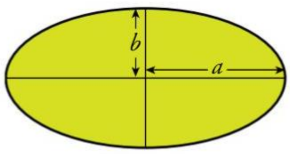
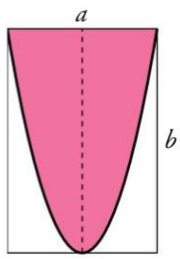
$$14^2 = a^2 + 9^2 \rightarrow 196 = a^2 + 81 \rightarrow a^2 = 196 - 81 = 115 \rightarrow a = \sqrt{115} = 10{,}7\ cm$$

Calculamos el área:

$$A = \frac{(37 + 55) \cdot 10{,}7}{2} = 492{,}2\ cm^2$$

S3. Ejercicios: pág. 215, ej. 2, 3, 4; pág. 221, ej. 23, 24.

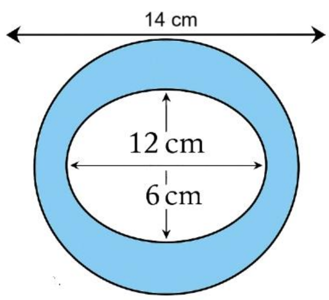
4. ÁREAS DE FIGURAS CURVAS

CÍRCULO	SECTOR CIRCULAR	CORONA CIRCULAR
 $A = \pi r^2$	 $A = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360}$	 $A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$
ELIPSE		PARÁBOLA
 $A = \pi ab$		 $A = \dfrac{2}{3}ab$

Ejemplo 1: Calcula el área de la zona coloreada de la figura en donde $\alpha = 90°, r = 3\ cm$, y $R = 9\ cm$.

$$A = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha}{360} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot \alpha}{360} - \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot \alpha}{360} = 56{,}55\ cm^2$$

Ejemplo 2: Calcula el área de la zona coloreada.

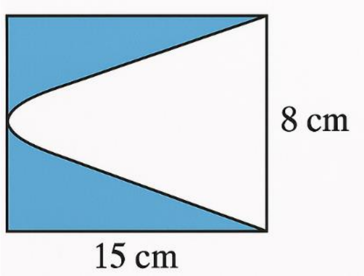


$$A_{Circunferencia} = \pi \cdot 7^2 = 49\pi = 153.94\ cm^2$$

$$A_{Elipse} = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi = 56.55\ cm_2$$

$$A_{Coloreada} = 153.94 - 56.55 = 97.39\ cm^2$$

Ejemplo 3: Calcula el área de la zona coloreada.



$$A_{Rectángulo} = 8 \cdot 15 = 120\ cm^2$$

$$A_{Parábola} = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 7.5 = 20\ cm_2$$

$$A_{Coloreada} = 120 - 20 = 100\ cm^2$$

S4. Ejercicios: pág. 216, ej. 1; pág. 221, ej. 26.

S5. Ejercicios: Ficha *Áreas de figuras planas en la realidad*.

5. CUERPOS GEOMÉTRICOS

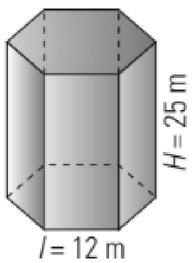
5.1 PRISMA

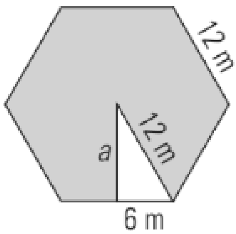
Un **PRISMA** es un sólido geométrico que tiene dos bases poligonales paralelas y caras laterales rectangulares.

$$A = 2 \cdot A_{Base} + P_{Base} \cdot h$$

$$V = A_{Base} \cdot h$$

Ejemplo: Calcula el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 12 m y su altura es de 25 m.





1º Calculamos la apotema.

$$a = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10,39\ m$$

2º Calculamos el área de la base.

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(6 \cdot 12) \cdot 10,39}{2} = 374,04\ m^2$$

3º Calculamos el área del prisma.

$$A = 2 \cdot A_{Base} + P_{Base} \cdot h = 2 \cdot 374,04 + 72 \cdot 25 = 2548,08\ m^2$$

4º Calculamos el volumen del prisma.

$$V = A_{Base} \cdot h = 374,04 \cdot 25 = 9351\ m^3$$

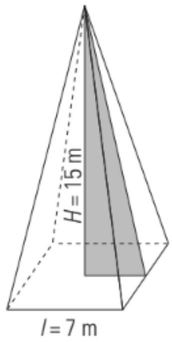
5.2 PIRÁMIDE

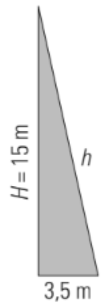
Una **PIRÁMIDE** es un sólido geométrico que tiene una base poligonal y caras laterales triangulares que se unen en un vértice común

$$A = A_{Base} + \frac{P_{Base} \cdot a}{2}$$

$$V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3}$$

<u>Ejemplo:</u> Calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 7 m de arista y cuya altura mide 15 m.





1º Calculamos la apotema de la pirámide.

$$a = \sqrt{15^2 + 3.5^2} = \sqrt{237.25} = 15.40\ m$$

2º Calculamos el área de la base.

$$A_{Base} = 7^2 = 49\ m^2$$

3º Calculamos el área de la pirámide.

$$A = A_{Base} + \frac{P_{Base} \cdot a}{2}$$

$$A = 49 + \frac{28 \cdot 15.40}{2} = 49 + 215.6 = 264.6\ m^2$$

4º Calculamos el volumen de la pirámide.

$$V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3} = \frac{49 \cdot 15}{3} = 245\ m^3$$

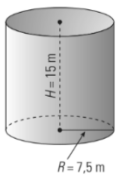
S6. Ejercicios: pág. 237, ej. 2; pág. 239, ej. 2.

5.3 CILINDRO

$$A = 2 \cdot A_{Base} + 2\pi r \cdot h$$

$$V = A_{Base} \cdot h$$

<u>Ejemplo:</u> Calcula el área y el volumen de un cilindro cuya base mide 7.5 m de radio y cuya altura es doble del radio de la base.



1º Calculamos el área de la base.

$$A_{Base} = \pi \cdot 7.5^2 = 176.71\ m^2$$

2º Calculamos el área del prisma.

$$A_{Prisma} = 2 \cdot A_{Base} + 2\pi r \cdot h = 2 \cdot 176.71 + 2 \cdot \pi \cdot 7.5 \cdot 15 = 1060.28\ m^2$$

3º Calculamos el volumen del prisma.

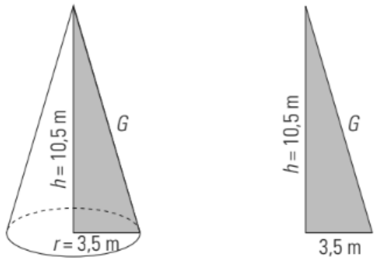
$$V = A_{Base} \cdot h = 176.71 \cdot 15 = 2650.72\ m^2$$

5.4 CONO

$$A = A_{Base} + \pi r g$$

$$V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3}$$

Ejemplo: Calcula el área y el volumen de un cono en el que el radio de la base mide 3.5 m y la altura es el triple que dicho radio.



1º Calculamos el área de la base.

$$A_{Base} = \pi \cdot 3.5^2 = 38.48\, m^2$$

2º Calculamos la generatriz.

$$g = \sqrt{10.5^2 + 3.5^2} = \sqrt{122.5} = 11.07\, m$$

3º Calculamos el área de la pirámide.

$$A = A_{Base} + \pi r g = 38.48 + \ \pi \cdot 3.5 \cdot 11.07 = 160.2\, m^2$$

4º Calculamos el volumen de la pirámide.

$$V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3} = \frac{38.48 \cdot 10.5}{3} = 134.68\, m^3$$

5.5 ESFERA

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Ejemplo: Calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 7.5 m.

$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 7.5^2 = 706.86\, m^2$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 7.5^3}{3} = 1767.15\, m^3$$

S7. Ejercicios: pág. 237, ej. 3; pág. 245, ej. 23.

S8-9. Ejercicios: Ficha *Áreas y volumen de cuerpos geométricos*.

S10. Ejercicios: Ficha *Área de figuras coloreadas.*

S11. Ejercicios: Ficha *Cuerpos geométricos.*

S12. Ejercicios: Ficha *Pre-Examen 8. Geometría*.