TEMA 9. FUNCIONES

1. FUNCIONES. DOMINIO Y RECORRIDO

Una **FUNCIÓN**, f, es una relación entre dos conjuntos que asocia a cada elemento del conjunto inicial un único elemento del conjunto final.

$$f: A \rightarrow B$$
$$a \rightarrow f(a) = b$$

Una función puede expresarse mediante una **TABLA**, una **GRÁFICA** o una **EXPRESIÓN ANALÍTICA** (fórmula).

1.1 RECORRIDO

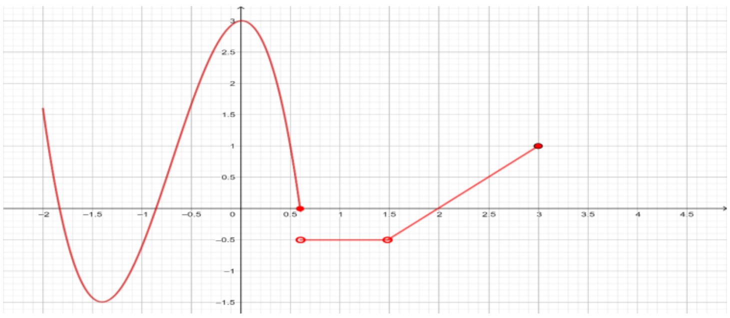
El **RECORRIDO** o **IMAGEN,** Imf, de una función es el conjunto de todos los valores de $y = f(x)$ que toma.

1.2 DOMINIO

El **DOMINO** de una función, $Domf$, es el conjunto de valores de x para los que está definida la función**.**

GRAFICAMENTE:

Ejemplo: Calcula el domino y recorrido de la función.



$$Domf = [-2, 0'5] \cup (0'5, 1'5) \cup (1'5, 3], \quad Recorregut\ f = [-1'5, 3]$$

ANALÍTICAMENTE

El domino de una función es tan amplio como permita su expresión analítica.

CASOS ESPECIALES:

1. **Funciones racionales.**

Una fracción algebraica no existe si el denominador es cero.

Ejemplo: Halla el dominio de definición de la función: $f(x)=\frac{x-3}{x^2-5x}$

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2-5x=0\rightarrow x(x-5)=0\rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x-5=0\rightarrow x=5\end{cases}$$

2º El domino serán todos los valores reales menos las soluciones de la ecuación.

$$Domf=\mathbb{R}-\{0,5\}$$

2. Funciones irracionales

Una raíz de índice par no existe si el número de dentro es negativo.

Ejemplo 1: Halla el dominio de definición de la función: $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

1º Igualamos el radicando a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2-4x-5=0\rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm6}{2}\rightarrow\begin{cases} x=5 \\ x=-1\end{cases}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

$-\infty$ $\quad$ -1	5	$+\infty$
$(-2)^2-4\cdot(-2)-5=7$	$0^2-4\cdot0-5=-5$	$6^2-4\cdot6-5=7$
$+$	$-$	$+$

3º El domino serán los intervalos donde los valores sean positivos.

$$Domf=(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$$

S1. Ejercicios: pág. 219, ej. 1, 2, 3; pág. 238, ej. 41, 42.

Ejemplo 2: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2x-5}}$

1º Hallamos los valores que anulan al numerador y al denominador.

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$2x - 5 = 0 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

	$-\infty \qquad -3$	$-3 \qquad \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} \qquad +\infty$
$x+3$	$-4+3=-1 \rightarrow -$	$0+3=+3 \rightarrow +$	$3+3=+6 \rightarrow +$
$2x-5$	$2\cdot(-4)-5=-13 \rightarrow -$	$2\cdot 0-5=-5 \rightarrow -$	$2\cdot 6-5=+1 \rightarrow +$
$\frac{x+3}{2x-5}$	$\frac{-}{-}=+$	$\frac{+}{-}=-$	$\frac{+}{+}=+$

3º El domino serán los intervalos donde los valores sean positivos, sin incluir el valor que anula al denominador.

$$Domf = (-\infty, -3] \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

3. Funciones logarítmicas

No existe el logaritmo de un número negativo ni el de cero.

Ejemplo: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

1º Igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

$-\infty \qquad 0$	3	$+\infty$
$(-1)^2 - 3\cdot(-1) = 4$	$1^2 - 3\cdot 1 = -2$	$4^2 - 3\cdot 4 = 4$
$+$	$-$	$+$

3º El domino serán los intervalos donde los valores sean positivos, sin incluir los extremos donde se anula.

$$Domf = (-\infty, 0) \cup (3+\infty)$$

S2. Ejercicios: pág. 238, ej. 43, 44.

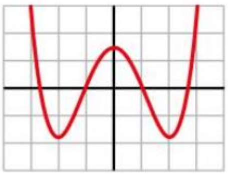
2. SIMETRÍA Y PERIODICIDAD

2.1 SIMETRÍA

- Una función presenta una **SIMETRÍA PAR** o simetría respecto al eje de ordenadas si $f(-x) = f(x)$.
- Una función presenta una **SIMETRÍA IMPAR** o simetría respecto al origen de coordenadas si $f(-x) = -f(x)$.

Ejemplos: Estudia las simetrías de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{x^4-8x^2+7}{5}$



Calculamos $f(-x)$:

$f(-x) = \frac{(-x)^4-8(-x)^2+7}{5} = \frac{x^4-8x^2+7}{5} = f(x) \rightarrow$ $Simetría\ Par$

b. $f(x) = x^3 - 3x$

Calculamos $f(-x)$:

$f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x =$ $-f(x) \rightarrow Simetría\ Impar$

c. $f(x) = x^5 + 2x^3 - 1$

Calculamos $f(-x)$:

$f(-x) = (-x)^5 + 2(-x)^3 - 1 = -x^5 - 2x^3 - 1 \rightarrow No\ presenta\ simetría$

2.2 PERIODICIDAD

Una función es **PERIÓDICA** de periodo T si su gráfica se repite a intervalos de longitud T.

Ejemplo: Sabiendo que f es una función periódica de periodo 4, de la que conocemos los valores: $f(0) = 3, f(1) = 5, f(2) = 0, f(3) = 1$. Calcula:

a. $f(17) = f(1) = 5$

b. $f(38) = f(2) = 0$

c. $f(12) = f(0) = 3$

S3. Ejercicios: pág. 220, ej. 4, 5; pág. 238, ej. 45, 47.

2. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones, f y g se llama **FUNCIÓN COMPOSICIÓN** de, f y g y se designa $g\ o\ f$ a la función que transforma x en $g[f(x)]$

$$g\ o\ f : x \to f(x) \to g[f(x)]$$

Ejemplo: Considera las funciones

$$f(x) = x^2 - x, \qquad g(x) = \frac{4}{x+1}$$

Obtén la expresión analítica de $g\ o\ f$ y $f\ o\ g$

$$g\ o\ f = g[f(x)] = g[x^2 - x] = \frac{4}{x^2 - x + 1}$$

$$f\ o\ g = f[g(x)] = f\left[\frac{4}{x+1}\right] = \left(\frac{4}{x+1}\right)^2 - \frac{4}{x+1} = \frac{16}{(x+1)^2} - \frac{4}{x+1}$$

$$= \frac{16 - 4(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{16 - 4x - 4}{(x+1)^2} = \frac{12 - 4x}{(x+1)^2}$$

3. FUNCIÓN INVERSA

Se llama **FUNCIÓN INVERSA** de f a otra función f^{-1} que cumple que

$$f\ o\ f^{-1} = f^{-1} o\ f = x$$

CÁLCULO DE LA FUNCIÓN INVERSA

Ejemplo: Halla la expresión analítica de la función inversa de $f(x) = 2x - 3$

1º Llamamos $f(x) = y \to y = 2x - 3$

2º Intercambiamos las incógnitas x y y.

$$x = 2y - 3$$

3º Despejamos y.

$$x = 2y - 3 \to 2y = x + 3 \to y = \frac{x+3}{2} \to f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

Ejemplo: Comprueba que $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ es la inversa de $f(x) = 2x - 3$

$$f^{-1} o\ f = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}[2x - 3] = \frac{2x - 3 + 3}{2} = x$$

S4. Ejercicios: pág. 232, ej. 35; pág. 233, ej. 37, 38; pág. 240, ej. 66, 68, 70.

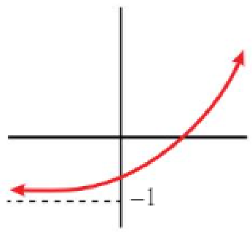
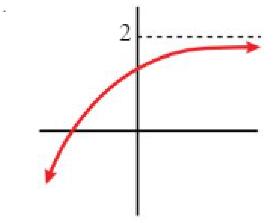
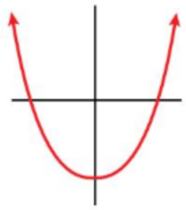
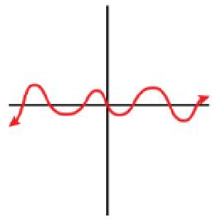
TEMA 10. LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. <u>LÍMITES GRÁFICAMENTE</u>

1.1 LÍMITES CUANDO $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

El **LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$** es el valor al que se aproxima la función cuando la x toma valores muy grandes ($x \to +\infty$) o muy pequeños ($x \to -\infty$).

<u>Ejemplos:</u>

a)	b)	c)	d)
			
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $= +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $= +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = no\ existe$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = no\ existe$

1.2 LÍMITES CUANDO $x \to c$

El **LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO** es el valor que toma la función cuando la x se aproxima a dicho punto.

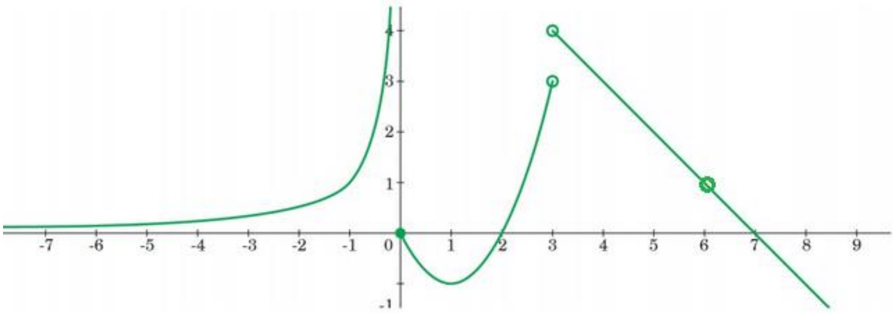
Para calcular el límite en un punto debemos calcular los límites laterales:

- Límite por la izquierda→ $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$, es decir x se aproxima a c por la izquierda.
- Límite por la derecha→ $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$, es decir x se aproxima a c por la derecha.

Únicamente existe límite si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.

Si $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \infty \to \nexists \lim\limits_{x\to c} f(x)$

<u>Ejemplo:</u> Calcula $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$



$$\lim_{x\to 0} f(x) \to \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \end{cases} \to \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \to \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1 \end{cases} \to \lim_{x\to 1} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) \to \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = +3 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = +4 \end{cases} \to \nexists \lim_{x\to 3} f(x)$$

$$\lim_{x\to 6} f(x) \to \begin{cases} \lim_{x\to 6^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x\to 6^+} f(x) = 1 \end{cases} \to \lim_{x\to 6} f(x) = 1$$

S5. Ejercicios: pág. 256, ej. 17; pág. 258, ej. 18; pág. 267, ej. 46; pág. 269, ej. 78.

2. LÍMITES CUANDO $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

2.1 LÍMITES DE FUNCIONES POLINÓMICAS

El límite cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ de una función polinómica es siempre $+\infty$ o $-\infty$ dependiendo del término de mayor grado.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to +\infty} 5x^3 + 3x^2 + x = 5 \cdot (+\infty)^3 = +5 \cdot +\infty = +\infty$

b) $\lim_{x\to +\infty} -5x^3 + 3x^2 + x = -5 \cdot (+\infty)^3 = -5 \cdot +\infty = -\infty$

c) $\lim_{x\to -\infty} -5x^3 + 3x^2 + x = -5 \cdot (-\infty)^3 = -5 \cdot -\infty = +\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty} 5x^3 + 3x^2 + x = 5 \cdot (-\infty)^3 = +5 \cdot -\infty = -\infty$

e) $\lim_{x\to -\infty} 3x^2 + x = +3 \cdot (-\infty)^2 = +3 \cdot +\infty = +\infty$

f) $\lim_{x\to -\infty} -3x^2 + x = -3 \cdot (-\infty)^2 = -3 \cdot +\infty = -\infty$

g) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{(+\infty)^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$

h) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{-x^5} = \sqrt[3]{-(+\infty)^5} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$

i) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{-x^5} = \sqrt[3]{-(-\infty)^5} = \sqrt[3]{-(-\infty)} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$

j) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{-x^3} = \sqrt{-(+\infty)^3} = \sqrt{-(+\infty)} = \sqrt{-\infty} = No\ existe$

k) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^6} = \sqrt{(-\infty)^6} = \sqrt{(+\infty)} = +\infty$

2.2 LÍMITES EN FUNCIONES RACIONALES f(x)=P(x)/Q(x)

CASO: $x \to +\infty$

En una función racional para calcular el límite cuando $x \to +\infty$ comparamos el grado del polinomio del numerador y del denominador.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty} \ \boldsymbol{I} \qquad \qquad \boldsymbol{ndeterminaci\acute{o}n}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^p + \cdots}{bx^q + \cdots} = \begin{cases} Si\ grado\ de\ P > grado\ de\ Q\ \to \lim\limits_{x\to+\infty} = \pm\infty \\ Si\ grado\ de\ P = grado\ de\ Q\ \to \lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{a}{b} \\ Si\ grado\ de\ P < grado\ de\ Q\ \to \lim\limits_{x\to+\infty} = 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2x-1}{10x^2+7x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^3}{10x^2} = \frac{+}{+} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^3-5x^2-1}{6x^3-7x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^3}{6x^3} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{10x-3}{-5x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{10x}{-5x^2} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{10x^4+5x}{6-x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{10x^4}{-x^3} = \frac{+}{-} = -\infty$

CASO: $x \to -\infty$

Para calcular el límite cuando $x \to -\infty$ calculamos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+2x-1}{10x^2+7x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3(-x)^3}{10(-x)^2} = \frac{-}{+} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3x^3-5x^2-1}{6x^3-7x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3(-x)^3}{6(-x)^3} = \frac{+3}{-6} = \frac{-1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{10x^4+5x}{6-x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{10(-x)^4}{-(-x)^3} = \frac{+}{+} = +\infty$

S6. Ejercicios: pág. 267, ej. 40 a-h, 41 a-h.

2.3 LÍMITES EN FUNCIONES $\infty - \infty$

Al restar dos expresiones infinitas obtenemos $= \infty - \infty$ $\boldsymbol{Indeterminación}$

CASO 1. Raíz – raíz. Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

Ejemplo 1: Calcula

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2: Calcula

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-x^2-1}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

CASO 2. Fracción – Fracción. Reducimos a común denominador.

Ejemplo 1: Calcula

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot(3x+5) - 2\cdot(x^2-2)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-2x^2+4}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x+4}{2x} = \infty$$

Ejemplo 2: Calcula

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3+5}{-x+2} - \frac{-4x^3+x}{-x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(-3x^3+5)\cdot(-x-2) - (-4x^3+x)\cdot(-x+2)}{(-x+2)\cdot(-x-2)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+6x^3-5x-10-4x^4+8x^3+x^2-2x}{x^2+2x-2x-4}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^4+14x^3+x^2-7x-10}{x^2-4} = -\infty$$

S7. Ejercicios: pág. 267, ej. 42, 45; pág. 270, ej. 8; pág. 271, ej. 14.

2.4 LÍMITES DE UNA POTENCIA

- $(+\infty)^{+\infty} = \infty, \quad (+\infty)^{-\infty} = 0$
- $Si\ a > 0 \rightarrow\ (+\infty)^a = +\infty. \quad Si\ a < 0 \rightarrow (+\infty)^a = 0$
- $Si\ a \neq 0 \rightarrow a^0 = 1.$
- $Si\ a > 1 \rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = 0 \end{cases}$
- $Si\ 0 < a < 1 \rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = +\infty \end{cases}$
- 1^{∞} $\qquad 1^{-\infty}$ **Indeterminación**

Número e

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

<u>Ejemplos:</u> Calcula los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)^{x-3} = (+\infty)^{+\infty} = \infty$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^{x+1} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-7x)^{-2} = (+\infty)^{-2} = 0$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x}\right)^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^x = (+2)^{+\infty} = +\infty$

f. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x^2+x}\right)^x = (+3)^{-\infty} = 0$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

h. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{5x^2-2}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\infty} = +\infty$

<u>Ejemplos:</u> Calcula los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} = e$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = e^2$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{\frac{2}{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x+2}}=$
e^2

e. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+5}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}\to Dividimos\ \begin{array}{c}(x^2+1):(x+5)\\ -4 \qquad 1\end{array}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+5}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-4}{x+5}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{-4}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{-4}}\right)^{\frac{x+5}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+5}\cdot\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{-4}}\right)^{\frac{x+5}{-4}}\right]^{\frac{-4x^2-4}{x^2+5x}}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$$

S8. Ejercicios: pág. 255, ej. 13, 14; pág. 266, ej. 37, 38; pág. 267, ej. 45.

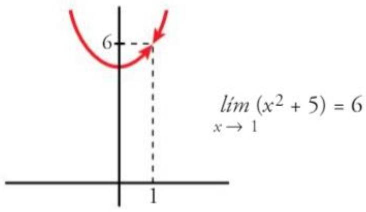
3. <u>LÍMITES CUANDO $x\to número$</u>

3.1 LÍMITE DE UN POLINOMIO

Para calcular el $\lim\limits_{x\to c}f(x)$, sustituimos x por c y calculamos $f(c)$.

<u>Ejemplo:</u> Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to1}(x^2+5)=1^2+5=6$$



3.2 LÍMITE EN UNA FUNCIÓN "A TROZOS"

- **Caso 1. Cálculo del límite en el punto de ruptura**

Calculamos los límites laterales:

Si $\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\lim\limits_{x\to c+}f(x)=l\to\lim\limits_{x\to c}f(x)=l$

Si $\lim\limits_{x\to c^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to c+}f(x)=l\to No\ existe\ límite$

- **Caso 2. Cálculo del límite en otro punto cualquiera**

Sustituimos el punto en el trozo correspondiente.

Ejemplos: Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x < 3 \\ -x + 2 & x \geq 3 \end{cases}$$

Calcula $\lim_{x \to 3} f(x)$, $\lim_{x \to 1} f(x)$, $\lim_{x \to 7} f(x)$

a) Para calcular $\lim_{x \to 3} f(x)$ necesito calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -3 + 2 = -1$$

Como $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$ → No existe límite en x=3.

b) Para calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$ sustituimos en el primer tramo:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

c) Para calcular $\lim_{x \to 7} f(x)$ sustituimos en el segundo tramo

$\lim_{x \to 7} f(x) = -7 + 2 = -5$

S9. Ejercicios: Ficha Límites en un punto

3.3 LÍMITE EN FUNCIONES RACIONALES f(x)=P(x)/Q(x)

CASO 1. Si al sustituir x por c, $Q(c) \neq 0 \rightarrow \lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$

Ejemplo: Calcula

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{5x + 10} = \frac{3^2 - 4}{5 \cdot 3 + 10} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

CASO 2. Si al sustituir x por c $Q(c) = 0 \rightarrow \lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm \infty \rightarrow$

Calculamos los límites laterales, sustituyendo en puntos muy próximos a c por ambos lados.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 4} = \frac{1^2 + 3}{1^2 - 5 \cdot 1 + 4} = \frac{4}{0}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{0{,}9^2 + 3}{0{,}9^2 - 5 \cdot 0{,}9 + 4} = (12{,}29) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1{,}1^2 + 3}{1{,}1^2 - 5 \cdot 1{,}1 + 4} = (-14{,}5) = -\infty$$

CASO 3. Si al sustituir x por c $Q(c) = 0$ y $P(c) = 0$ → Indeterminación.

Factorizamos por Ruffini y simplificamos.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \frac{(-2)^2 - 4}{(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 10} = \frac{0}{0}$$

$x^2 - 4 = 0 \to x^2 = 4 \to x = \pm\sqrt{4} \to x = \pm 2 \to x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

$x^3 + 2x^2 + 5x + 10 = 0$

	1	2	5	10
-2		-2	0	-10
	1	0	5	0

$x^2 + 5 = 0 \to x^2 = -5 \to x = \sqrt{-5}$

$x^3 + 2x^2 + 5x + 10 = (x+2)(x^2+5)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2+5)} = \frac{x-2}{x^2+5} = \frac{-2-2}{(-2)^2+5} = \frac{-4}{9}$$

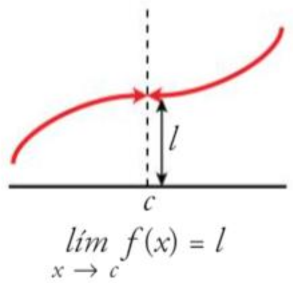
S10. Ejercicios: pág. 258, ej. 19; pág. 267, ej. 47, 48, 49, 50 a, c.

4. CONTINUIDAD

Una función es **CONTINUA** si "puede ser construida de un solo trazo".

Una función **CONTINUA EN EL PUNTO** $x = c$ cumple:

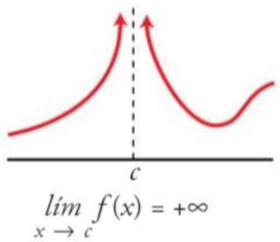
$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

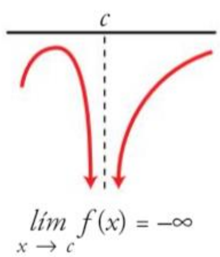


Existen tres tipos de **DISCONTINUIDADES**:

Discontinuad de salto infinito

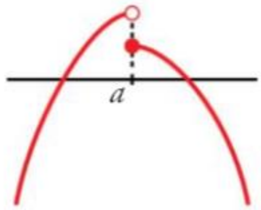
$\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$





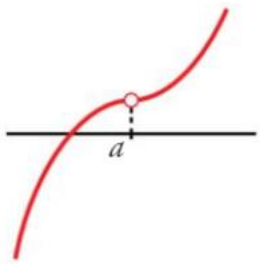
Discontinuidad de salto finito

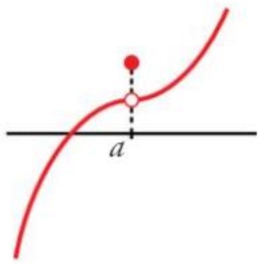
$$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$$



Discontinuidad evitable

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) \neq f(c)$$





4.1 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN A TROZOS

A) Estudio de la continuidad de una función a trozos:

Las funciones a trozos pueden ser discontinuas en los puntos de ruptura.

1º Calculamos los límites laterales y valor de la función en los puntos de ruptura.

2º Clasificamos el tipo de discontinuidad.

Ejemplos: Estudia la continuidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ 2x - 1 & 0 < x < 2 \\ x + 5 & x \geq 2 \end{cases}$$

Los puntos de ruptura son $x = 0, x = 2$

$\boldsymbol{x} = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (2x - 1) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1$$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ →La función es continua en $x = 0$

$\boldsymbol{x} = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (x + 5) = 2 + 5 = 7$$

$$f(2) = 2 + 5 = 7$$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$ → La función es discontinua de salto finito en $x = 2$

S11. Ejercicios: pág. 260, ej. 20; pág. 268, ej. 51, 54, 61.

B) Cálculo del parámetro desconocido para que una función sea continua:

1º Calculamos los límites laterales y valor de la función en los puntos de ruptura.

2º Igualamos las tres expresiones y resolvemos la ecuación.

Ejemplo: Halla el valor de k para que la función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x \leq 1 \\ x + k & x > 1 \end{cases}$$

El punto de ruptura es $x = 1$.

$\boldsymbol{x} = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x - 5) = 2 \cdot 1 - 5 = 2 - 5 = -3$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + k) = 1 + k$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$1 + k = -3 \rightarrow k = -3 - 1 \rightarrow k = -4$$

S12. Ejercicios: pág. 260, ej. 22; pág. 268, ej. 55; pág. 271, ej. 12, 13, 21, 22.

4.2 CONTINUIDAD DE FUNCIONES RACIONALES $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$

Las funciones de tipo $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ son discontinuas en los valores que anulan el denominador.

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación.

2º Estudiamos el tipo de discontinuidad sustituyendo la solución de la ecuación en la función.

- Si al sustituir $Numerador \neq 0 \rightarrow \lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{número}{0}=\pm\infty$

  La función es discontinua de salto infinito en dicho punto y es necesario calcular los límites laterales.

- Si al sustituir $Numerador = 0 \rightarrow f\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{0}{0}$ →Factorizamos, simplificamos y volvemos a sustituir.
  - Si $\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{número}{0}$ → Discontinua de salto infinito.
  - Si $\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=número$ → Discontinua evitable.

<u>Ejemplo:</u> Estudia la continuidad de la función $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x^2-x-2}$

$$x^2-x-2=0 \rightarrow x=\frac{+1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{3}=\begin{cases}x=2\\x=-1\end{cases}$$

La función es discontinua en $x=2$ y $x=-1$.

$\boldsymbol{x}=-1$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\frac{3^3-2\cdot3^2}{3^2-3-2}=\frac{-3}{0}\rightarrow Discontinua\ de\ salto\ infinito\ en\ x=3$$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\frac{2{,}9^3-2\cdot2{,}9^2}{2{,}9^2-2{,}9-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\frac{3{,}1^3-2\cdot3{,}1^2}{3{,}1^2-3{,}1-2}=+\infty$$

$\boldsymbol{x}=2$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\frac{2^3-2\cdot2^2}{2^2-2-2}=\frac{0}{0}\rightarrow\lim_{x\to2}\frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2}{(x+1)}=\frac{2^2}{2+1}=\frac{4}{3}$$

$Discontinua\ evitable\ en\ x=2$

S13. Ejercicios: pág. 260, ej. 21; pág. 268, ej. 53.

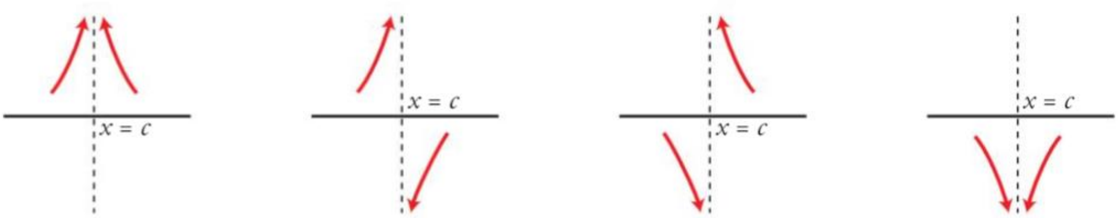
5. RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS

Las **RAMAS INFINITAS** son tramos de curva que se alejan indefinidamente. Para que haya una rama infinita es necesario que una de las variables, x o y, tienda a infinito.

Cuando una rama infinita se aproxima a una recta a esta se le llama **ASÍNTOTA.**

5.1 ASÍNTOTA VERTICAL

Si $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ entonces la recta $x = c$ es una **ASÍNTOTA VERTICAL**.

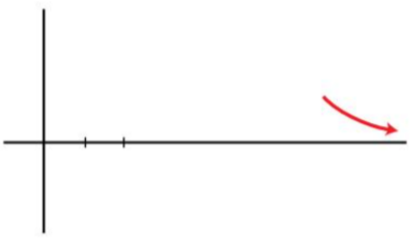


1º En las funciones racionales, igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación para el valor de la recta $x = c$.

2º Calculamos los límites laterales sustituyendo en valores próximos para conocer la posición de la curva respecto a la asíntota.

5.2 ASÍNTOTA HORIZONTAL

Si $\lim_{x \to +\pm\infty} f(x) = l$ entonces la recta $y = l$ es una **ASÍNTOTA HORIZONTAL**.



1º Calculamos el límite de la función cuando $x \to \infty$ para obtener la ecuación de la recta $y = l$.

2º Tomamos un valor grande y otro pequeño para conocer la posición de la curva respecto a la asíntota.

Ejemplo: Halla las asíntotas verticales y horizontales de la función y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$$

Asíntotas verticales

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación.

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{array}$$

Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 2$

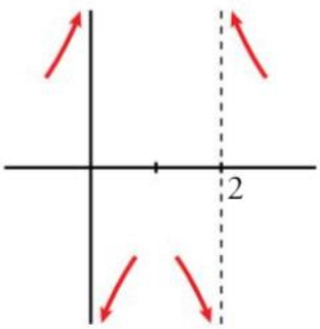
2º Estudiamos la posición de la curva respecto a cada una de ellas calculando los límites laterales.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{(-0{,}01)^2 + 1}{(-0{,}01)^2 - 2 \cdot (-0{,}01)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{(0{,}01)^2 + 1}{(0{,}01)^2 - 2 \cdot (0{,}01)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{(1{,}99)^2 + 1}{(1{,}99)^2 - 2 \cdot (1{,}99)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{(2{,}01)^2 + 1}{(2{,}01)^2 - 2 \cdot (2{,}01)} = +\infty$$



Asíntota horizontal

1º Calculamos el límite de la función cuando $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow y = 1$$

Asíntota horizontal: $y = 1$

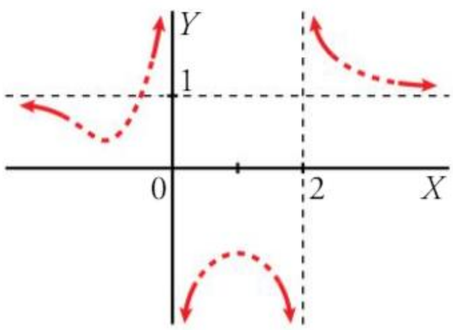
2º Estudiamos la posición de la curva respecto a la asíntota.

$$\text{li} + \underset{x \to \infty}{\text{m}} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \frac{1000^2 + 1}{1000^2 - 2 \cdot 1000} = 1^+$$

$\rightarrow Por\ encima\ de\ 1$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \frac{(-1000)^2 + 1}{(-1000)^2 - 2 \cdot (-1000)} = 1^-$$

$\rightarrow Por\ debajo\ de\ 1$

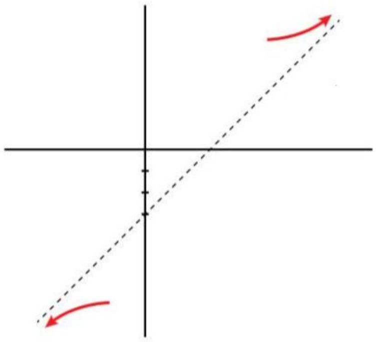


S14. Ejercicios: pág. 261, ej. 23, 24; pág. 268, ej. 56, 59.

5.3 ASÍNTOTA OBLICUA

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, $\quad \mathrm{m} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$ entonces $y = mx + n$ es

una **ASÍNTOTA OBLICUA.**



Ejemplo: Halla las asíntotas de la función y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

$$f(x) = \frac{2x^2}{\mathrm{x} - 3}$$

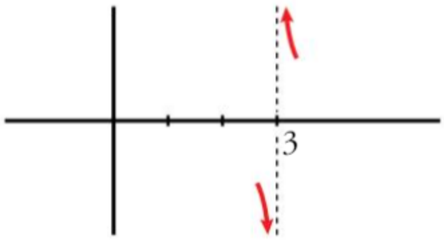
Asíntotas verticales

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación.

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

Asíntota vertical: $x = 3$

2º Estudiamos la posición de la curva respecto a cada una de ellas calculando los límites laterales.



$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{2\cdot(2{,}9)^2}{2{,}9-3} = -\infty$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{2\cdot(3{,}1)^2}{3{,}1-3} = +\infty$

Asíntota horizontal/oblicua

1º Calculamos el límite de la función cuando $x \rightarrow \infty$.

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{\mathrm{x}-3} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal}$

$$\mathrm{m} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2}{x^2 - 3x} = \frac{2}{1} = 2$$

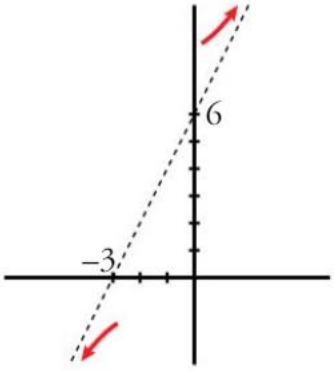
$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{\mathrm{x}-3} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 2x(x-3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 6x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{x-3} = 6$$

La ecuación de la asíntota oblicua es $y = 2x + 6$

2º Estudiamos la posición de la curva respecto a la asíntota calculando $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{2x^2}{\mathrm{x} - 3} - (2x + 6) = \frac{2x^2 - (2x + 6) \cdot (x - 3)}{x - 3}$$
$$= \frac{2x^2 - (2x^2 - 6x + 6x - 18)}{x - 3} = \frac{18}{x - 3}$$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{18}{x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{18}{x - 3} = -\infty$$

S15. Ejercicios: pág. 262, ej. 25, 26; pág. 268, ej. 60.

S16-18. Ejercicios: Repaso.

S19. Ejercicios: Pre-Examen 5. Funciones, límites y continuidad.