TEMA 8 y 9. FUNCIONES

1. INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

S1. Ejercicios: pág. 168, ej. 1; pág. 177, ej. 1, 2, 3.

Una **FUNCIÓN** es una relación entre dos variables, x y y

- x es la **VARIABLE INDEPENDIENTE** (eje horizontal o eje de abscisas)**.**
- y es la **VARIABLE DEPENDIENTE** (eje vertical o eje de ordenadas)**.**

La función asocia a cada valor de x **UN ÚNICO** valor de y, $y = f(x)$.

- El **DOMINIO** de una función es el tramo de "x" para los cuales hay valores de "y".
- El **RECORRIDO** de una función es el conjunto de valores de "y" que toma la función.

- Una función es **CRECIENTE** cuando al aumentar la variable independiente, "x", aumenta la variable dependiente, "y".
- Una función es **DECRECIENTE** cuando al aumentar "x" disminuye "y".

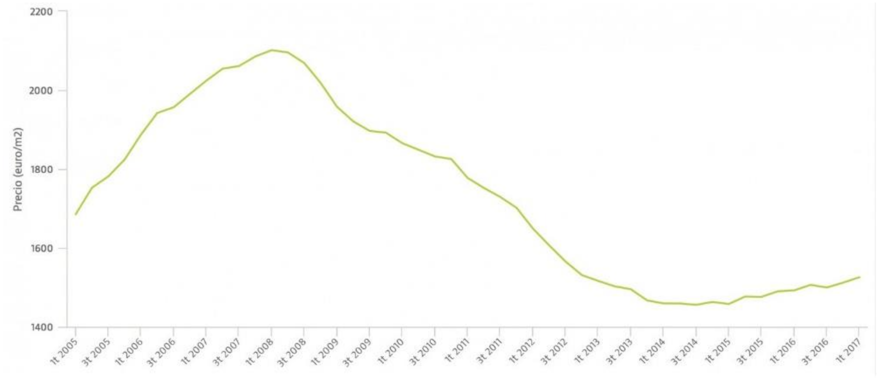
- Una función tiene un **MÁXIMO RELATIVO** en un punto cuando la ordenada (y) es mayor que la ordenada (y) de los puntos que la rodean.

  A la izquierda de un máximo relativo la función es creciente, y a la derecha la función es decreciente.
- Una función tiene un **MÍNIMO RELATIVO** en un punto cuando la ordenada (y) es menor que la ordenada(y) de los puntos que la rodean.

  A la izquierda de un mínimo relativo la función es decreciente, y a la derecha creciente.

Clara Benedicto Baldonado

Ejemplo: La siguiente función viene dada por su gráfico y describe la evolución del precio de la vivienda en España a lo largo del tiempo, desde 2005 hasta 2017.



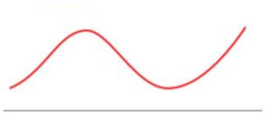
1. ¿Cuál es la variable dependiente? *El precio de la vivienda.*
2. ¿Cuál es la variable independiente? *El tiempo.*
3. ¿Cuál es el dominio de la función? *Dominio=[Primer trimestre 2005, Primer trimestre 2017]*
4. ¿Cuál es el recorrido de la función? *Recorrido=[1450 euros, 2100 euros]*
5. ¿En qué momento la función es creciente? *La función es creciente en [1er trimestre 2005, 1er trimestre 2008] y [3er trimestre 2014, 1er trimestre 2017]*
6. ¿En qué momento la función es decreciente? *La función es decreciente en [1er trimestre 2008, 3er trimestre 2014]*
7. ¿Cuál fue el precio máximo? ¿En qué momento pasó? *El precio máximo de la vivienda fue 2100 euros el metro cuadrado durante el primer trimestre de 2008.*
8. ¿Cuál fue precio mínimo? ¿En qué momento pasó? *El precio mínimo de la vivienda va a ser de 1450 euros el metro cuadrado durante el primer trimestre de 2014.*

S2. Ejercicios: pág. 170, ej. 1; pág. 171, ej. 2, 4.

Los **PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES** son los puntos donde la función interseca con uno de los ejes de coordenadas.

- **PUNTO DE CORTE CON EL EJE X:** Punto que corta con el eje horizontal $(a, 0)$.
- **PUNTO DE CORTE CON EL EJE Y:** Punto que corta con el eje vertical $(0, b)$

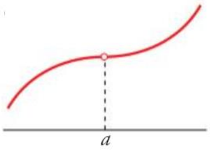
- Una función es **CONTINUA** cuando no presenta discontinuidades de ningún tipo, cuando se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.



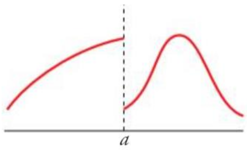
Clara Benedicto Baldonado

- Una función es **DISCONTINUA** si presenta algún salto en su trazo. Hay tres tipos de discontinuidad:

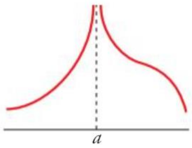
DISCONTINUA EVITABLE. Le falta un punto, no está definida en x=a.



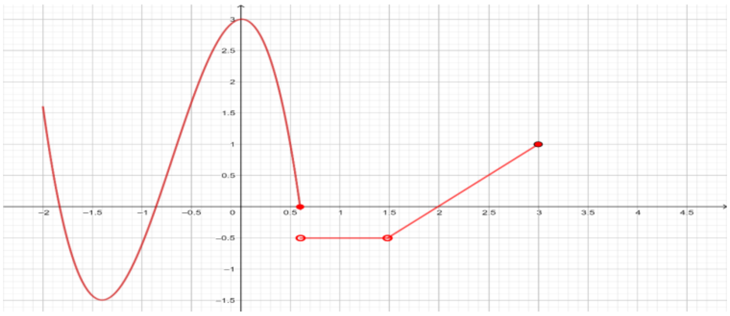
DISCONTINUA DE SALTO FINITO. Presenta un salto en x=a.



DISCONTINUA DE SALTO INFINITO. Tiene ramas infinitas en el punto x=a, la función crece o decrece indefinidamente cuando x se aproxima a x=a.



<u>Ejemplo:</u> Observa el gráfico y contesta.



a) Dominio y recorrido.

$$Domf = [-2, 0'5] \cup (0'5, 1'5) \cup (1'5, 3], \quad Recorregut\ f = [-1', 3]$$

b) Continuidad y puntos de discontinuidad.

$$La\ función\ es\ continua\ en\ todos\ los\ puntos\ menos\ en\ x = 0{,}5\ y\ x = 1{,}5.$$

$$Discontinua\ de\ salto\ finito\ en\ x = 0{,}5; Discontinua\ evitable\ en\ x = 1{,}5$$

c) Puntos de corte.

$$Eje\ X: (-1.85, 0), (-0.8, 0), (0.6, 0), (2, 0)$$

$$Eje\ Y: (0, 3)$$

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$La\ función\ es\ creciente\ en\ (-1'5, 0) \cup (1'5, 3)$$

$$La\ función\ es\ decreciente\ en\ (-2, -1'5) \cup (0, 0'5)$$

$$La\ función\ es\ constante\ en\ (0'5, 1'5)$$

e) Máximos y mínimos relativos.

$$Máximo\ (0, 3), mínimo\ (-1'5, -1'5)$$

S3. Ejercicios: Ficha Estudio de una función.

2. FUNCIONES LINEALES

Las funciones lineales se representan mediante **RECTAS**. Hay de tres tipos:

FUNCIÓN CONSTANTE

$y = n$

Recta paralela al eje X.

$pendiente = m = 0$

FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD

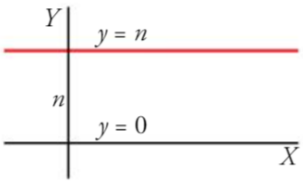
$y = mx$

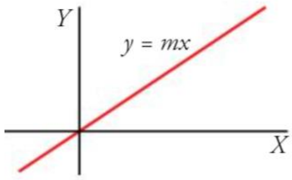
Recta que pasa por el origen.

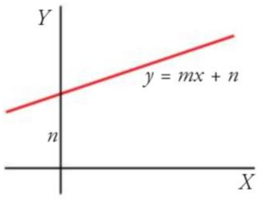
FUNCIÓN LINEAL GENERAL

$y = mx + n$

(m pendiente y n ordenada en el origen)





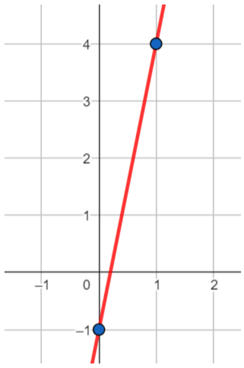


2.1 REPRESENTACIÓN

Para representar una función lineal damos dos valores cualesquiera a la x y sustituimos en la ecuación para calcular las coordenadas y correspondientes.

Ejemplo: Representa $y = 5x - 1$

x	y
0	$y = 5 \cdot 0 - 1 = -1$
1	$y = 5 \cdot 1 - 1 = 4$



S4. Ejercicios: pág. 187, ej. 2, 3; pág. 188, e. 1, 2.

2.2 ECUACIÓN DE LA RECTA A PARTIR DE UN PUNTO Y LA PENDIENTE

Supongamos que de una recta conocemos un punto (x_0, y_0) y su pendiente $m = \frac{variación\ de\ la\ y}{variación\ de\ la\ x}$, entonces la ecuación de la recta puede expresarse como:

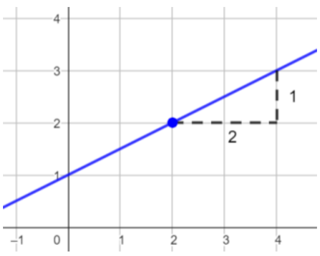
$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0)$$

<u>Ejemplo 1:</u> Escribe la ecuación de la recta que pasa por $P(-2, 5)$ y tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$.

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0) \rightarrow y = 5 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \big(x - (-2)\big) \rightarrow y = 5 - \frac{2}{3} \cdot (x + 2) \rightarrow$$

$$y = 5 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

<u>Ejemplo 2:</u> Escribe la ecuación de la siguiente recta:



Pasa por el punto $P(2, 2)$ y su pendiente es $m = \frac{variación\ de\ la\ y}{variación\ de\ la\ x} = \frac{1}{2}$.

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0) \rightarrow y = 2 + \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \rightarrow$$

$$y = 2 + \frac{1}{2}x - 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

S5. Ejercicios: pág. 189, ej. 3, 4. (pág. 196, ej. 2)

2.3 ECUACIÓN DE LA RECTA A PARTIR DE DOS PUNTOS

Si de una recta conocemos dos puntos $P(x_1,\ y_1), Q(x_2, y_2)$ podemos obtener su pendiente a partir de ellos-

$$m = \frac{variación\ de\ la\ y}{variación\ de\ la\ x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

<u>Ejemplo 1:</u> Escribe la ecuación de la recta que pasa por $P(5, 3)$ y $Q(-3, 4)$.

1º Calculamos la pendiente.

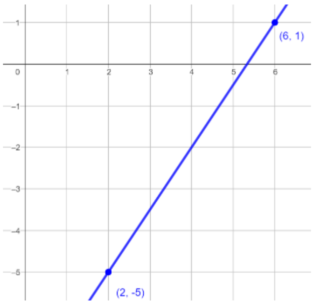
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{-3 - 5} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$

2º Tomamos uno de los dos puntos y obtenemos la ecuación de la recta.

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0) \rightarrow y = 3 - \frac{1}{8} \cdot (x - 5) \rightarrow$$

$$y = 3 - \frac{1}{8}x + \frac{5}{8} \rightarrow y = -\frac{1}{8}x + \frac{29}{8}$$

<u>Ejemplo 2:</u> Escribe la ecuación de la siguiente recta:



1º Calculamos la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-5)}{6 - 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

2º Tomamos uno de los dos puntos y obtenemos la ecuación de la recta.

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0) \rightarrow y = -5 + \frac{3}{2} \cdot (x - 2) \rightarrow$$

$$y = -5 + \frac{3}{2}x - 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - 8$$

S6. Ejercicios: pág. 190, ej. 5, 6. (pág. 196, ej. 4; pág. 197, ej. 12)

3. <u>FUNCIONES CUADRÁTICAS</u>

Las **FUNCIONES CUADRÁTICAS** se describen con ecuaciones de segundo grado

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

Y se representan mediante **PARÁBOLAS**.

Si $a > 0$ tienen las ramas hacia arriba ∪, y si $a < 0$ hacia abajo ∩.

3.1 REPRESENTACIÓN

Ejemplo: Representa la siguiente parábola: $y = x^2 - 3x - 4$

1º Calculamos el vértice de la parábola.

Coordenada x: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2 \cdot 1} = 1.5$

Coordenada y: $y_v = 1.5^2 - 3 \cdot 1.5 - 4 = -6.25$

Vértice: $(1.5, -6.25)$

2º Calculamos los puntos de corte:

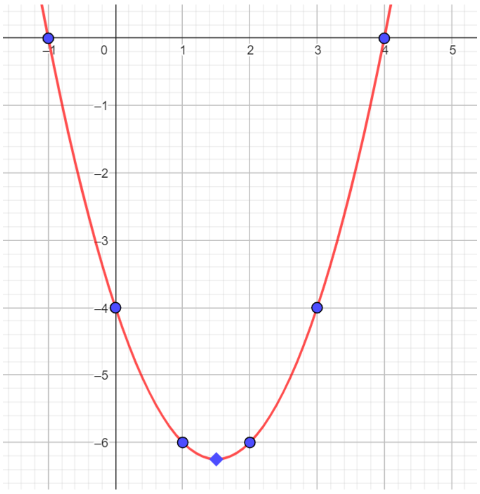
Corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4 \rightarrow (0, -4)$

Corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} =$
$\begin{cases} x = 4 \rightarrow (4, 0) \\ x = -1 \rightarrow (-1, 0) \end{cases}$

3º Calculamos dos puntos a cada lado del vértice:

x	y
0	$y = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4 \rightarrow (0, -4)$
1	$y = 1^2 - 3 \cdot 1 - 4 = -6 \rightarrow (1, -6)$
1.5	-6.25
2	$y = 2^2 - 3 \cdot 2 - 4 = -6 \rightarrow (2, -6)$
3	$y = 3^2 - 3 \cdot 3 - 4 = -4 \rightarrow (3, -4)$

4º Representamos todos los puntos y unimos.



S7. Ejercicios: pág. 194, ej. 2, 3. (pág. 197, ej. 15)

4. PROBLEMAS DE FUNCIONES LINEALES

4.1 PROBLEMAS DE MOVIMIENTOS

Ejemplo 1: Alicia salió de su casa a caminar a una velocidad de 5 km/h. ¿A qué distancia se encontrará dentro de t horas?

$$v = \frac{d}{t} \rightarrow d = v \cdot t \rightarrow d = 5t$$

Ejemplo 2: Javier salió de paseo hace 2 horas a una velocidad de 4 km/h. ¿A qué distancia estará dentro de t horas?

$$Como\ salió\ hace\ 2\ h\ llevará\ caminando\ 2 + t\ horas$$

$$d = v \cdot t \rightarrow d = 4 \cdot (2 + t)$$

Ejemplo 3: Ricardo está en su pueblo a 40 km de nosotros. Sale hacia aquí en bicicleta a 15 km/h. ¿A qué distancia se encuentra de nosotros dentro de t horas?

$$Dentro\ de\ t\ horas\ habrá\ recorrido\ 15t\ km$$

$$Como\ nos\ separan\ 40\ km\ estará\ a\ d = 40 - 15t\ km\ de\ nosotros$$

Ejemplo 4: Una peregrina se encuentra a 50 km de Santiago. Prosigue su camino a las 8 de la mañana a un ritmo de 6 km/h. ¿A qué distancia de su destino se encontrará a las t horas del día?

$$Sale\ a\ las\ 8\ de\ la\ mañana \rightarrow\ a\ las\ t\ horas\ del\ día\ lleva\ t - 8\ horas\ caminando$$

$$Ha\ recorrido\ 6 \cdot (t - 8)\ km$$

$$Como\ se\ encuentra\ a\ 50\ km\ de\ Santiago\ \rightarrow d = 50 - 6 \cdot (t - 8)$$

S8. Ejercicios: pág. 191, ej. 1, 2, 3; pág. 197, ej. 18, 19.

4.2 PROBLEMAS CON DOS FUNCIONES

Ejemplo: Paula y Álex viven a 24 km. Paula sale de su casa caminando a 4 km/h en busca de su amigo Álex. Dos horas después, Álex sale al encuentro de Paula en bici a 12 km/h.

a) Expresa mediante dos funciones la distancia de cada uno a casa de Paula al cabo de t horas.

$$A\ las\ t\ horas\ Paula\ está\ de\ su\ casa:$$

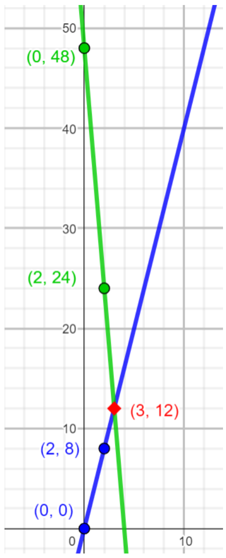
$$d = 4t$$

$$Álex\ sale\ 2\ horas\ después, por\ lo\ que\ habrá\ recorrido\ 12(t-2)\ km$$

$$Como\ se\ encuentra\ a\ 24\ km\ de\ casa\ de\ Paula \rightarrow d = 24 - 12(t-2) \rightarrow$$

$$d = 24 - 12t + 24 \rightarrow d = -12t + 48$$

b) Representa las dos funciones en unos ejes de coordenadas.



1º Damos dos valores cualesquiera a la variable independiente y sustituimos para calcular la variable dependiente en las dos funciones.

t	d
0	0
2	8

t	d
0	48
2	24

2º Representamos los dos puntos de cada función y los unimos formando una recta.

c) Indica en que punto se cortan las dos rectas y qué significa cada una de esas coordenadas.

Para hallar el punto de corte resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} d = 4t \\ d = -12t + 48 \end{cases} \rightarrow 4t = -12t + 48 \rightarrow 4t + 12t = 48 \rightarrow 16t = 48 \rightarrow t = \frac{48}{16} = 3$$

$$d = 4 \cdot 3 = 12$$

Se encuentran 3 horas después de que salga Paula de casa a 12 km de su casa.

S9. Ejercicios: pág. 192, ej. 1; pág. 198, ej. 20, 22.

S10. Ejercicios: Ficha Problemas de Funciones

S11. Ejercicios: Funciones lineales y cuadráticas.

S12. Ejercicios: Pre-Examen 7. Funciones.