TEMA 4. PROGRESIONES

1. SUCESIONES

Se llama **SUCESIÓN** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero, ...

Los elementos de la sucesión se llaman **TÉRMINOS** y se designan mediante una letra con un subíndice que indica su posición.

Ejemplo: La sucesión $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ son los números pares ordenados.

$$s_1 = 2, s_2 = 4, s_3 = 6, s_4 = 8, s_5 = 10, s_6 = 12, \dots$$

1.1 TÉRMINO GENERAL

Se llama **TÉRMINO GENERAL** a la fórmula que permite calcular cualquier término en función de su posición.

Ejemplo 1: Escribe los primeros cuatro términos de la sucesión que tiene por término general $a_n = 4n - 3$.

$$a_1 = 4 \cdot 1 - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$a_2 = 4 \cdot 2 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$a_3 = 4 \cdot 3 - 3 = 12 - 3 = 9$$

$$a_4 = 4 \cdot 4 - 3 = 16 - 3 = 13$$

Ejemplo 2: Obtén el término general de las siguientes sucesiones.

a. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{5}, \dots \rightarrow a_n = \frac{n}{n+1}$

b. $5, 10, 15, 20, 25, \dots \rightarrow a_n = 5n$

c. $3, 9, 27, 81, \dots \rightarrow a_n = 3^n$

d. $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots \rightarrow a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

e. $1, 4, 9, 16, 25, \dots \rightarrow a_n = n^2$

f. $20, 22, 24, 26, 28, \dots \rightarrow a_n = 18 + 2n$

S1: Ejercicios: pág. 86, ej. 1; pág. 97, ej. 1, 2, 3 ef, .4 abc, 5.

1.2 FORMA RECURRENTE

La **FORMA RECURRENTE** es la fórmula que permite calcular un término a partir de sus anteriores.

Ejemplo 1: Sea $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, escribe los cincos primeros términos.

$a_1 = 1, a_2 = 1$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

Ejemplo 2: Busca la forma recurrente para definir las siguientes sucesiones:

a. $7, 4, 3, 1, 2, -1, \ldots \rightarrow a_1 = 7, a_2 = 4, a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

b. $2, 5, 3, -2, -5, -3, \ldots \rightarrow a_1 = 2, a_2 = 5, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

c. $2, 3, 6, 18, 108 \ldots \rightarrow a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

S2: Ejercicios: pág. 87, ej. 7, 10, 11; pág. 97, ej. 15.

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una **PROGRESIÓN ARITMÉTICA** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando un mismo número al que se llama **DIFERENCIA**.

2.1 TÉRMINO GENERAL

El **TÉRMINO GENERAL** de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$$

Ejemplo 1: Escribe los cuatros primeros término y el término general si $a_1 = 2$ y $d = 3$.

Los cuatro primeros términos son:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2 + 3 \cdot (2 - 1) = 2 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$$
$$a_3 = 2 + 3 \cdot (3 - 1) = 2 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$$
$$a_4 = 2 + 3 \cdot (4 - 1) = 2 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11$$

El término general es:

$$a_n = 2 + 3 \cdot (n - 1) = 2 + 3n - 3 \rightarrow a_n = 3n - 1$$

Ejemplo 2: Escribe el término general de la siguiente progresión aritmética: $9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, \ldots$

$$a_1 = 9, d = a_2 - a_1 = 7 - 9 = -2$$

$$a_n = 9 - 2 \cdot (n-1) = 9 - 2n + 2 \rightarrow a_n = -2n + 11$$

Ejemplo 3: Halla la diferencia y el primer término de la progresión aritmética de la que conocemos que $a_3 = 5$, $a_8 = -5$.

1º Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d \rightarrow 5 = a_1 + 2d \\ a_8 = a_1 + 7d \rightarrow -5 = a_1 + 7d \end{cases}$$

2º Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5 = a_1 + 2d \rightarrow \\ -5 = a_1 + 7d \rightarrow \cdot (-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 = a_1 + 2d \\ 5 = -a_1 - 7d \end{cases}$$

$$10 = -5d \rightarrow d = \frac{10}{-5} \rightarrow d = -2$$

$$5 = a_1 + 2 \cdot (-2) \rightarrow 5 = a_1 - 4 \rightarrow a_1 = 5 + 4 \rightarrow a_1 = 9$$

S3: Ejercicios: pág. 88, ej. 1, 2; p. 98, ej. 19.

2.2 SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

La **SUMA** de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Ejemplo 1: Si $a_1 = 5$ y $d = 3$ calcula S_{20}.

$$a_{20} = a_1 + d \cdot (n-1) = 5 + 3 \cdot 19 = 5 + 57 = 62$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(5 + 62) \cdot 20}{2} = \frac{67 \cdot 20}{2} = 670$$

Ejemplo 2: Calcula la suma de los quince primeros números de la sucesión

$$9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, \ldots$$

$$a_1 = 9, d = -2 \rightarrow a_{15} = a_1 - d \cdot (n-1) = 9 - 2 \cdot 14 = 9 - 28 = -19$$

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(9 - 19) \cdot 15}{2} = \frac{-10 \cdot 15}{2} = -75$$

S4: Ejercicios: pág. 89, ej. 6, 7, 8.

2.3 PROBLEMAS

Ejemplo: Un estudiante de 3º de ESO se propone el día 1 de septiembre repasar matemáticas durante 15 días, haciendo cada día 2 ejercicios de matemáticas más que el día anterior. Si el primer día empezó haciendo un ejercicio:

a. ¿Cuántos ejercicios hará el día 15 de septiembre?
b. ¿Cuántos ejercicios hará en total?

1º Identificamos los datos conocidos.

$a_1 = 1, d = 2$

2º Identificamos aquello que nos preguntan.

a. $a_{15} = a_1 + d \cdot (n-1) = 1 + 2 \cdot 14 = 1 + 28 = 29$

b. $S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(1+29) \cdot 15}{2} = \frac{30 \cdot 15}{2} = 225\ ejercicios$

S5: Ejercicios: pág. 98, ej. 26; pág. 101, ej. 7. (pág. 98, ej. 23)

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una **PROGRESIÓN GEOMÉTRICA** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por un número fijo r llamado **RAZÓN**.

3.1 TÉRMINO GENERAL

El término general de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Ejemplo 1: Escribe el quinto término y el término general de una progresión geométrica con $a_1 = 250$ y $r = 1{,}2$.

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = 250 \cdot 1{,}2^4 = 518{,}4$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 250 \cdot 1{,}2^{n-1}$$

Ejemplo 2: Halla el término general de la siguiente sucesión: 80, 40, 20, 10, 5, 2.5, ...

$$a_1 = 80, r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ejemplo 3: En una progresión geométrica $a_1 = 625$ y $a_3 = 400$. Halla a_6.

$$a_3 = a_1.r^2 \rightarrow 400 = 625 \cdot r^2 \rightarrow r^2 = \frac{400}{625} = \frac{16}{25} \rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Hay dos posibles soluciones:

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 = 625 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{5} = 204.8$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 = 625 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 = -\frac{1024}{5} = -204.8$$

S6: Ejercicios: pág. 97, ej. 7, 8; pág. 91, ej. 23.

3.2 SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

La **SUMA DE LOS N PRIMEROS TÉRMINOS** de una progresión geométrica es:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Ejemplo 1: Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica con $a_1 = 3$ y $r = -2$.

1º Calculamos a_{10}.

$$a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 3 \cdot (-2)^9 = -1536$$

2º Calculamos S_{10}.

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{-1536 \cdot (-2) - 3}{-2 - 1} = \frac{3069}{-3} = -1023$$

Ejemplo 2: Calcula la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica: $80, 8, 0.8, 0.08, \ldots$

$$a_1 = 80, r = \frac{8}{80} = \frac{1}{10}$$

1º Calculamos a_{15}.

$$a_{15} = a_1 \cdot r^{14} = 80 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{14} = 8 \cdot 10^{-13}$$

2º Calculamos S_{10}.

$$S_{15} = \frac{a_{15} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{8 \cdot 10^{-13} \cdot \left(\frac{1}{10}\right) - 80}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{-80}{-\frac{9}{10}} = \frac{800}{9}$$

Ejemplo 3: Calcula $3 + 30 + 300 + 3\,000 + 30\,000 + 300\,000$ aplicando la suma de los términos.

$$a_1 = 3, r = 10, a_6 = 300\,000$$

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{300\,000 \cdot 10 - 3}{10 - 1} = \frac{2999997}{9} = 333\,333$$

S7: Ejercicios: pág. 92, ej. 6, 8; pág. 97, ej. 12.

3.3 SUMA DE INFINITOS TÉRMINOS CUANDO $0 < r < 1$

Cuando $0 < r < 1$ los términos de una progresión geométrica decrecen aproximándose a cero.

Por tanto, si sumamos n términos con muy grande:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

el termino $a_n \cdot r = a_1 \cdot r^n$ se hace cada vez más pequeño y llega a ser insignificante si n es muy grande, por lo que desaparece.

Por tanto, cuando $0 < r < 1$ podemos calcular la **SUMA DE "TODOS"** los términos:

$$S_\infty = \frac{-a_1}{r - 1} \rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

Ejemplo: Calcula la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 10$ y $r = \frac{2}{3}$.

Como $r = \frac{2}{3} < 1 \rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{10}{1-\frac{2}{3}} = \frac{10}{\frac{1}{3}} = 30$

S8: Ejercicios: pág. 93, ej. 10, 11; pág. 97, ej. 13.

3.4 PROBLEMAS

Ejemplo: Si al comienzo de cada año ingresamos 1000 euros en un banco al 4% anual,

- **a.** ¿Cuánto dinero ingresamos el quinto año?
- **b.** ¿Cuánto dinero tendremos en total al final del quinto año?

1º Identificamos los datos conocidos.

$a_1 = 1000, r = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$

2º Identificamos aquello que nos preguntan.

- **a.** $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 1000 \cdot 1{,}04^4 = 1169{,}\widehat{85}\ euros \cong 1169{,}86$

- **b.** $S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{1169{,}86 \cdot 1{,}04 - 1000}{1{,}04-1} = \frac{216{,}65}{0{,}04} = 5416{,}32\ euros$

S9: Ejercicios: pág. 92, ej. 9; pág. 98, ej. 18, 21, 34, 35.

S10: Ejercicios: Repaso. Ficha *Progresiones*.

S11. Ejercicios: Repaso. Ficha *Problemas de Progresiones*

S12. Ejercicios: Ficha *Pre-Examen 6. Progresiones*.