TEMA 7. SISTEMAS DE ECUACIONES

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas forman un **SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES**.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

La **SOLUCIÓN** de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de números que hace ciertas las dos ecuaciones a la vez.

2. INTERPRETACIÓN GRÁFICA

Cada **ECUACIÓN** del sistema se representa mediante una **RECTA**.

La **SOLUCIÓN** del sistema es el **PUNTO DE CORTE** de las dos rectas.

Ejemplo: Resuelve gráficamente el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 5x + 3y = 18 \end{cases}$$

1º Despejamos la y en ambas ecuaciones.

$$2x - 3y = 3 \rightarrow -3y = 3 - 2x \rightarrow y = \frac{3 - 2x}{-3}$$

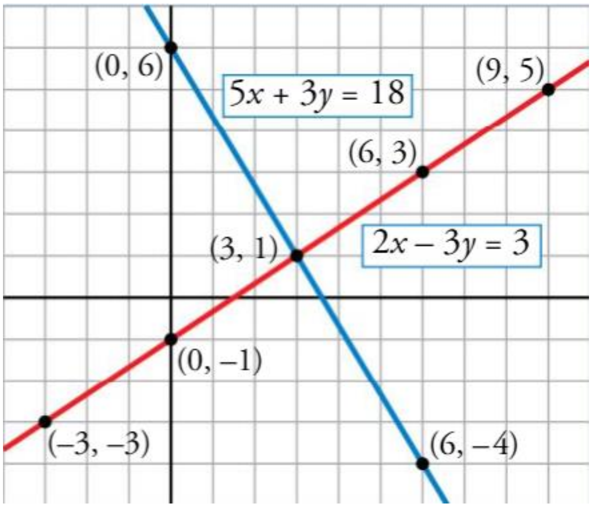
$$5x + 3y = 18 \rightarrow 3y = 18 - 5x \rightarrow y = \frac{18 - 5x}{3}$$

2º Damos dos valores cualesquiera a la x y sustituimos para calcular la y (en ambas ecuaciones)

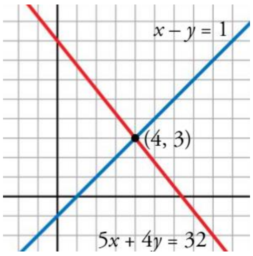
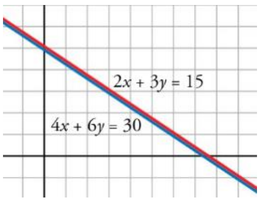
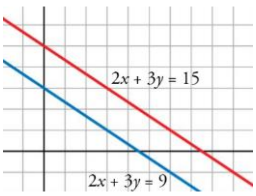
x	y	
0	$y = \frac{3 - 2 \cdot 0}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$	$\rightarrow (0, -1)$
3	$y = \frac{3 - 2 \cdot 3}{-3} = \frac{-3}{-3} = +1$	$\rightarrow (0, +1)$

x	y	
0	$y = \frac{18 - 5 \cdot 0}{3} = \frac{18}{3} = +6$	$\rightarrow (0, +6)$
3	$y = \frac{18 - 5 \cdot 3}{3} = \frac{3}{3} = +1$	$\rightarrow (0, +1)$

3º Representamos los dos puntos de cada recta y los unimos formando dos rectas. El punto donde se cortan ambas rectas es la solución del sistema.



3. TIPOS DE SISTEMAS

▪ Los sistemas que tienen una **ÚNICA SOLUCIÓN**, es decir, se cortan en un único punto, se llaman **COMPATIBLES DETERMINADOS.**	
▪ Los sistemas que tienen **INIFINITAS SOLUCIONES**, es decir, son dos rectas coincidentes, se llaman **COMPATIBLES INDETERMINADOS.**	
▪ Los sistemas que **NO** tienen **SOLUCIÓN**, es decir, son paralelas, se llaman **INCOMPATIBLES.**	

S1: Ejercicios: pág. 149, ej. 1 a, c, d; pág. 156, ej. 2.

Clara Benedicto Baldonado

4. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

4.1 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Para resolver un sistema por el **MÉTODO DE SUSTITUCIÓN**:

1º Operamos para simplificar el sistema.

2º Despejamos una de las dos incógnitas (x o y) en una de las ecuaciones.

2º **SUSTITUÍMOS** su expresión en la otra ecuación.

Ejemplo. Resuelve el sistema por el método de sustitución:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{5} - \dfrac{x-y}{3} = \dfrac{2x+9y}{15} - 5 \\ -5(x+y-8)+13 = -3y-7 \end{cases}$$

1º Operamos para simplificar el sistema.

$$\begin{cases} \dfrac{3\cdot(x-1)-5\cdot(x-y)}{15} = \dfrac{(2x+9y)-15\cdot 5}{15} \to 3x-3-5x+5y = 2x+9y-75 \to \\ 3x-5x-2x+5y-9y = 3-75 \to -4x-4y=-72 \to x+y=18 \\ -5x-5y+40+13=-3y-7 \ \to -5x-5y+3y=-40-13-7 \to -5x-2y=-60 \to \\ 5x+2y=60 \end{cases}$$

2º Despejamos una incógnita.

$$x+y=18 \to x=18-y$$

3º Sustituimos.

$$5\cdot(18-y)+2y=60$$

4º Operamos y resolvemos la ecuación.

$$90-5y+2y=60 \to -5y+2y=60-90 \to -3y=-30 \to y=\frac{-30}{-3} \to y=10$$

5º Sustituimos el valor obtenido en la ecuación despejada.

$$x=18-y \to x=18-10 \to x=8$$

La solución del sistema es: $x=8, y=10$

S2: Ejercicios: pág. 156, ej. 3 a, b; pág. 153, ej. 4; pág.157, ej. 15 c.

4.2 MÉTODO DE IGUALACIÓN

Para resolver un sistema por el **MÉTODO DE IGUALACIÓN**:

1º Operamos para simplificar el sistema.

2º Despejamos la misma incógnita (x o y) en las dos ecuaciones.

3º **IGUALAMOS** las expresiones obtenidas.

Ejemplo. Resuelve el sistema por el método de igualación:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-4}{5} - \dfrac{y+3}{2} = 3 \\ \dfrac{x+y}{2} = 1 \end{cases}$$

1º Operamos para simplificar el sistema.

$$\begin{cases} \dfrac{2\cdot(2x-4)-5\cdot(y+3)}{10} = \dfrac{3\cdot 10}{10} \to 4x-8-5y-15=30 \to 4x-5y=30+8+15 \to \\ 4x-5y=53 \\ \dfrac{x+y}{2}=1 \to \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{2}{2} \to x+y=2 \end{cases}$$

2º Despejamos la misma incógnita (x o y) en las dos ecuaciones.

$$4x-5y=53 \to 4x=53+5y \to x=\frac{53+5y}{4}$$

$$x+y=2 \to x=2-y$$

3º Se igualan las expresiones obtenidas.

$$\frac{53+5y}{4}=2-y$$

4º Operamos y resolvemos la ecuación.

$$\frac{53+5y}{4}=\frac{4\cdot(2-y)}{4} \to 53+5y=8-4y \to 5y+4y=8-53 \to 9y=-45 \to$$

$$y=\frac{-45}{9}=-5$$

5º Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones despejadas.

$$x=2-y \to x=2-(-5) \to x=7$$

La solución del sistema es: $x=7, y=-5$

S3: Ejercicios: pág. 156, ej. 4 a, b; pág. 157, ej. 14 b, 15 d.

4.3 MÉTODO DE REDUCCIÓN

Para resolver un sistema por el **MÉTODO DE REDUCCIÓN**:

1ºOperamos para simplificar el sistema.

2º Multiplicamos las ecuaciones para obtener un sistema en el que los coeficientes de una de las incógnitas (x o y) sean opuestos.

3º Sumamos ambas ecuaciones **REDUCIENDO** a una sola incógnita.

Ejemplo. Resuelve el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2y}{2}+\dfrac{x}{4}=0 \\ -x+5\cdot\left(\dfrac{2x+y+1}{6}\right)=6 \end{cases}$$

1º Operamos y simplificamos.

$$\begin{cases} \dfrac{x-2y}{2}+\dfrac{x}{4}=0 \rightarrow \dfrac{2\cdot(x-2y)+x}{4}=\dfrac{0}{4} \rightarrow 2x-4y+x=0 \rightarrow 3x-4y=0 \\ -x+5\cdot\left(\dfrac{2x+y+1}{6}\right)=6 \rightarrow -x+\dfrac{10x+5y+5}{6}=6 \rightarrow \dfrac{-6x+10x+5y+5}{6}=\dfrac{36}{6} \rightarrow \\ -6x+10x+5y=36-5 \rightarrow 4x+5y=31 \end{cases}$$

2º Multiplicamos las ecuaciones para que los coeficientes sean opuestos.

$$\begin{cases} 3x-4y=0 \rightarrow \cdot 4 \\ 4x+5y=31 \rightarrow \cdot(-3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12x-16y=0 \\ -12x-15y=-93 \end{cases}$$

2º Sumamos ambas ecuaciones y resolvemos la ecuación.

$$-31y=-93 \rightarrow y=\frac{-93}{-31} \rightarrow y=3$$

4º Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones.

$$3x-4y=0 \rightarrow 3x-4\cdot 3=0 \rightarrow 3x=12 \rightarrow x=\frac{12}{3} \rightarrow x=4$$

La solución del sistema es: $x=4, y=3$

S4: Ejercicios: pág. 156, ej. 5 a, c; pág. 157, ej. 17.

S5: Ejercicios: Repaso. Ficha. *Resolución de sistemas de ecuaciones*.

5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5.1 TIPO 1. MULTIPLICATIVOS

Ejemplo: Las rebajas pasadas me compré una camiseta y un pantalón por 35 €. Al acabar la temporada, decidí venderlos por Vinted con un aumento del 20 % sobre del precio de compra de la camiseta y con una disminución del 10 % del pantalón, obteniendo 38 €.

¿Cuánto me costó cada prenda?

1º Identificamos las incógnitas.

$$x = precio\ camiseta$$

$$y = precio\ pantalón$$

2º Planteamos el sistema.

$$\begin{gathered} x + y = 35 \\ 1{,}2x + 0{,}9y = 38 \end{gathered}$$

3º Resolvemos el sistema.

$$x + y = 35 \rightarrow x = 35 - y$$

$$1{,}2x + 0{,}9y = 38 \rightarrow 1{,}2 \cdot (35 - y) + 0{,}9y = 38 \rightarrow 42 - 1{,}2y + 0{,}9y = 38$$

$$-1{,}2y + 0{,}9y = 38 - 42 \rightarrow -0{,}3x = -6 \rightarrow x = \frac{-6}{-0{,}3} \rightarrow x = 20$$

$$y = 35 - 20 \rightarrow y = 15$$

4º Redactamos la solución.

$$El\ precio\ de\ las\ camisetas\ era\ de\ 15\ euros\ y\ el\ de\ los\ pantalones\ de\ 20\ euros$$

S6: Ejercicios: pág. 157, ej. 18, 19, 20, 21, 23, 25.

5.2 TIPO 2. EDADES

Ejemplo 2: Lola tiene 17 años más que su sobrino Pablo, y dentro de 9 años le doblará la edad. ¿Cuántos años tiene ahora Pablo? ¿Y Lola?

1º Identificamos las incógnitas y los representamos en una tabla.

	Edad ahora	Dentro de 9 años
Lola	x	$x + 9$
Pablo	y	$y + 9$

2º Planteamos el sistema.

$$\begin{gathered} x = y + 17 \\ x + 9 = 2 \cdot (y + 9) \end{gathered}$$

3º Resolvemos el sistema.

$$x = y + 17$$

$$x + 9 = 2y + 18 \rightarrow y + 17 + 9 = 2y + 18 \rightarrow y - 2y = -17 - 9 + 18 \rightarrow$$

$$-y = -8 \rightarrow y = \frac{-8}{-1} \rightarrow y = 8$$

$$x = 8 + 17 \rightarrow x = 25$$

4º Redactamos la solución.

$$Lola\ tiene\ 25\ años\ y\ Pablo\ 8\ años.$$

5.3 TIPO 3. MEZCLAS

Ejemplo: ¿Qué cantidades de aceite, uno puro de oliva, a 3 euros/litros, y otro de orujo, a 2 euros/litro, hay que emplear para conseguir 600 litros de mezcla a 2,40 euros/litro?

1º Identificamos las incógnitas y los representamos en una tabla.

	Litros	Precio (euros/litro)	Coste (euros)
Aceite de oliva	x	3	$3x$
Aceite de orujo	y	2	$2y$
Mezcla	600	2.40	$600 \cdot 2{,}40 = 1440$

2º Planteamos el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 600 \\ 3x + 2y = 1440 \end{cases}$$

3º Resolvemos el sistema.

$$x + y = 600 \rightarrow x = 600 - y$$

$$3x + 2y = 1440 \rightarrow 3 \cdot (600 - y) + 2y = 1440 \rightarrow 1800 - 3y + 2y = 1440 \rightarrow$$

$$-3y + 2y = 1440 - 1800 \rightarrow -y = -360 \rightarrow y = 360$$

$$x = 600 - 360 \rightarrow x = 240$$

4º Redactamos la solución.

$$240\ litros\ de\ aceite\ de\ oliva\ y\ 360\ litros\ de\ aceite\ de\ orujo$$

S7: Ejercicios: pág. 157, ej. 26, 28, 29.

S8. Ejercicios. Repaso problemas: pág. 161, ej. 9, 10, 11, 12, 15.

S9 Ejercicios. Repaso. Ficha *Problemas de sistemas de ecuaciones*.

S10. Ejercicios: Ficha *Pre-Examen 5. Sistemas de ecuaciones*.