

TEMA 6. ECUACIONES

Una **ECUACIÓN** es una igualdad formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo =.

Las **SOLUCIONES** de una ecuación son los valores de x que hacen cierta la ecuación.

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una **ECUACIÓN DE PRIMER GRADO** se puede reducir a la forma $ax + b = 0$.

- Si $a \neq 0 \rightarrow ax = -b \rightarrow x = -\frac{b}{a} \rightarrow$ Tiene una única solución.
- Si $a = 0, b \neq 0 \rightarrow 0x = -b \rightarrow$ No tiene solución. (No existe ningún valor de x que al multiplicarlo por 0 te de diferente de cero)
- Si $a = 0, b = 0 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones. (Cualquier número puede sustituir por x y al multiplicarlo por 0 siempre dará 0)

Ejemplos. Resuelve las ecuaciones:

a. $4x - 6 = 2(x + 3)$

$$4x - 6 = 2x + 6$$

$$4x - 2x = 6 + 6$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2} \rightarrow x = 6$$

b. $4x - 6 = 4(x + 3)$

$$4x - 6 = 4x + 12$$

$$4x - 4x = 12 + 6$$

$$0x = 18$$

No tiene solución

c. $4x - 6 = 4(x - 2) + 2$

$$4x - 6 = 4x - 8 + 2$$

$$4x - 4x = -8 + 2 + 6$$

$$0x = 0$$

Infinitas soluciones

1.1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DENOMINADORES

Ejemplo. Resuelve la ecuación:

$$\frac{3x - 1}{20} - \frac{2 \cdot (x + 3)}{5} = \frac{4x + 2}{15} - 5$$

1º Operamos numeradores.

$$\frac{3x - 1}{20} - \frac{2x + 6}{5} = \frac{4x + 2}{15} - 5$$

2º Reducimos a denominador común.

$$\frac{3 \cdot (3x - 1)}{60} - \frac{12 \cdot (2x + 6)}{60} = \frac{4 \cdot (4x + 2)}{60} - \frac{5 \cdot 60}{60}$$

3º Eliminamos los denominadores.

$$3 \cdot (3x - 1) - 12 \cdot (2x + 6) = 4 \cdot (4x + 2) - 5 \cdot 60$$

3º Eliminamos los paréntesis.

$$9x - 3 - 24x - 72 = 16x + 8 - 300$$

2º Pasamos los términos con x a un lado del $=$, y los términos sin x al otro lado.

$$9x - 24x - 16x = 3 + 72 + 8 - 300$$

3º Agrupamos ambos lados.

$$-31x = -217$$

4º Despejamos la x .

$$x = \frac{-217}{-31} \rightarrow x = 7$$

S1. Ejercicios: pág. 129, ej. 2.

2. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una **ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO** es una igualdad de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

2.1 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETAS

Las soluciones de una ecuación de segundo grado completan se obtienen usando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{si} \quad \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 2 \text{ soluciones} \\ b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 1 \text{ solución} \\ b^2 - 4ac < 0 \rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$$

Ejemplo: Resuelve $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6 + 4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

2.2 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

CASO 1: $b = 0 \rightarrow ax^2 + c = 0$

Para resolver este tipo de ecuaciones:

1º Aislamos x^2 .

2º Calculamos la raíz, obteniendo dos resultados, uno positivo y uno negativo.

Estas ecuaciones pueden tener 2 soluciones o ninguna solución.

Ejemplo 1: Resuelve $2x^2 - 98 = 0$

$$2x^2 = 98 \rightarrow x^2 = \frac{98}{2} \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$$

CASO 2: $c = 0 \rightarrow ax^2 + bx = 0$

Para resolver este tipo de ecuación:

1º Sacamos factor común la x .

2º Igualamos a cero cada uno de los factores y resolver la ecuación de primer grado.

Estas ecuaciones siempre tienen dos soluciones.

Ejemplo: Resuelve $-9x^2 + 18x = 0$

$$x(-9x + 18) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -9x + 18 = 0 \rightarrow -9x = -18 \rightarrow x = \frac{-18}{-9} \rightarrow x = +2 \end{cases}$$

S2. Ejercicios: pág. 137, ej. 6, 7, 8.

2.3 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON PARÉNTESIS

Ejemplo: Resuelve $(2x - 1)(3x - 2) + (2x - 3)^2 = 3(4x - 4) - (x - 2)^2 + 3$

1º Productos notables.

$$(2x - 1)(3x - 2) + (4x^2 - 12x + 9) = 3(4x - 4) - (x^2 - 4x + 4) + 3$$

2º Multiplicaciones.

$$6x^2 - 4x - 3x + 2 + 4x^2 - 12x + 9 = 12x - 12 - x^2 + 4x - 4 + 3$$

3º Pasamos todos los términos al mismo lado.

$$6x^2 - 4x - 3x + 2 + 4x^2 - 12x + 9 - 12x + 12 + x^2 - 4x + 4 - 3 = 0$$

4º Agrupamos.

$$11x^2 - 35x + 24 = 0$$

5º Aplicamos la fórmula.

$$x = \frac{35 \pm \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 24}}{2 \cdot 11} = \frac{35 \pm \sqrt{169}}{22} = \frac{35 \pm 13}{11} = \begin{cases} \frac{35 + 13}{22} = \frac{48}{22} = \frac{24}{11} \\ \frac{35 - 13}{22} = \frac{22}{22} = 1 \end{cases}$$

S3. Ejercicios: pág. 132, ej. 3. (pág. 137, ej. 9)

2.4 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DENOMINADORES

Ejemplo: Resuelve $\frac{x^2+3}{6} + \frac{x^2-7}{4} = \frac{(x+4)^2}{2} - \frac{1-9x}{12}$

1º Operamos numeradores.

$$\frac{x^2 + 3}{6} + \frac{x^2 - 7}{4} = \frac{x^2 + 8x + 16}{2} - \frac{1 - 9x}{12}$$

2º Reducimos a común denominador.

$$\frac{2 \cdot (x^2 + 3) + 3 \cdot (x^2 - 7)}{12} = \frac{6 \cdot (x^2 + 8x + 16) - (1 - 9x)}{12}$$

3º Eliminamos los denominadores.

$$2 \cdot (x^2 + 3) + 3 \cdot (x^2 - 7) = 6 \cdot (x^2 + 8x + 16) - (1 - 9x)$$

4º Eliminamos los paréntesis.

$$2x^2 + 6 + 3x^2 - 21 = 6x^2 + 48x + 96 - 1 + 9x$$

5º Pasamos todos los términos al mismo lado.

$$2x^2 + 6 + 3x^2 - 21 - 6x^2 - 48x - 96 + 1 - 9x = 0$$

6º Agrupamos.

$$-x^2 - 57x - 110 = 0$$

7º Resolvemos la ecuación.

$$x = \frac{57 \pm \sqrt{(-57)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-110)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{57 \pm \sqrt{2809}}{-2} = \frac{57 \pm 53}{-2}$$
$$= \begin{cases} \frac{57 + 53}{-2} = \frac{110}{-2} = -55 \\ \frac{57 - 53}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \end{cases}$$

S4. Ejercicios: pág. 133, ej. 4 a,b; pág. 137, ej. 10.

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema usando ecuaciones:

1º Traducimos el enunciado a lenguaje algebraico, transformando la frase a una ecuación.

2º Resolvemos la ecuación.

3.1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

TIPO 1. Relación entre variables.

Ejemplo 1: Dos amigas trabajan 30 y 50 días en un negocio. Se reparten los beneficios y a la segunda le corresponden 300 euros más que a la primera. ¿Cuánto se han repartido?

1º Planteamos la ecuación.

La primera (30 horas) → x euros La segunda (50 horas) → x + 300 euros

$$\frac{x}{30} = \frac{x + 300}{50}$$

2º Resolvemos la ecuación.

$$\frac{5x}{150} = \frac{3 \cdot (x + 300)}{150} \rightarrow 5x = 3x + 900 \rightarrow 5x - 3x = 900 \rightarrow 2x = 900$$

$$x = \frac{900}{2} = 450$$

3º Redactamos la solución.

450 euros la primera y 450 + 300 = 750 euros la segunda

TIPO 2. Variación de las condiciones

Ejemplo 2: Entre todos los amigos, aportando 6 € cada uno, íbamos a comprar un balón para Jordi. Pero Iván y Julia no pueden pagarlo, por lo que ahora tocamos a 10 €. ¿Cuántos amigos somos en la pandilla?

1º Planteamos la ecuación.

Número de amigos → x euros

$$6 \cdot x = 10 \cdot (x - 2)$$

2º Resolvemos la ecuación.

$$6x = 10x - 20 \rightarrow 6x - 10x = -20 \rightarrow -4x = -20$$

$$x = \frac{-20}{-4} = 5$$

3º Redactamos la solución.

En total, con Iván y Julia, son 5 amigos los que compran el regalo.

S5. Ejercicios: pág. 135, ej. 5; pág. 139, ej. 22, 23, 35, 36, 39, 43.

TIPO 3. Edades

Ejemplo 3: Lola tiene 17 años más que su sobrino Pablo, y dentro de 9 años le doblará la edad. ¿Cuántos años tiene ahora Pablo? ¿Y Lola?

1º Identificamos las incógnitas y los representamos en una tabla.

	Edad ahora	Dentro de 9 años
Pablo	x	$x + 9$
Lola	$x + 17$	$x + 17 + 9 = x + 26$

2º Planteamos el sistema.

$$x + 26 = 2 \cdot (x + 9)$$

3º Resolvemos el sistema.

$$x + 26 = 2x + 18 \rightarrow x - 2x = 18 - 26 \rightarrow -1x = -8 \rightarrow$$

$$x = \frac{-8}{-1} \rightarrow x = 8$$

4º Redactamos la solución.

Pablo 8 años y Lola $8 + 17 = 25$ años.

TIPO 4. Mezclas

Ejemplo 4: Un repostero ha mezclado 12 kg de azúcar de 1.10 euros/kg con una cierta cantidad de miel de 4.20 euros/kg. La mezcla sale a 2.34 euros/kg. ¿Cuánta miel puso?

1º Identificamos las incógnitas y los representamos en una tabla.

	Cantidad (kg)	Precio (euros/kg)	Coste (euros)
Azúcar	12	1.10	$12 \cdot 1.10 = 13.20$
Miel	x	4.20	$x \cdot 4.20 = 4.20x$
Mezcla	$x + 12$	2.34	$(x + 12) \cdot 2.34$

2º Planteamos el sistema.

$$13.20 + 4.20x = (x + 12) \cdot 2.34$$

3º Resolvemos el sistema.

$$\begin{aligned} 13.30 + 4.20x &= 2.34x + 28.08 \\ \rightarrow 4.20x - 2.34x &= 28.08 - 13.20 \rightarrow 1.86x = 14.88 \rightarrow \\ x &= \frac{14.88}{1.86} \rightarrow x = 8 \end{aligned}$$

4º Redactamos la solución.

8 kg de miel

S5. Ejercicios: pág. 135, ej. 3; pág. 139, ej. 24, 25, 29, 34; pág. 140, ej. 45, 47.

3.2 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

TIPO 1. Números.

Ejemplo 1: La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 5. ¿De qué número se trata?

1º Planteamos la ecuación.

$$\begin{aligned} \text{Número} \rightarrow x \quad \text{Número consecutivo} \rightarrow x + 1 \\ x^2 + (x + 1)^2 = 5 \end{aligned}$$

2º Resolvemos la ecuación.

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + 2x + 1 = 5 \rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 - 5 = 0 \rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \rightarrow \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{-2 \pm 6}{4} = \begin{cases} \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{-8}{4} = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

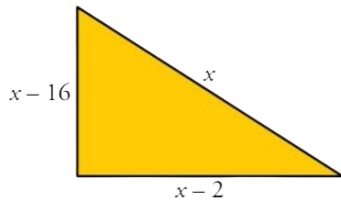
3º Redactamos la solución.

Los números consecutivos son: 1 y 2 o -2 y -1

TIPO 2. Geometría.

Ejemplo 2: En un triángulo rectángulo, un cateto mide 2 cm menos que la hipotenusa y el otro cateto 16 cm menos que la hipotenusa. Calcula la longitud de los tres lados.

1º Planteamos la ecuación.



$$\text{Hipotenusa} \rightarrow x \quad \text{Cateto 1} \rightarrow x - 2$$

$$\text{Cateto 2} \rightarrow x - 2 - 14 = x - 16$$

$$x^2 = (x - 16)^2 + (x - 2)^2$$

2º Resolvemos la ecuación.

$$x^2 = x^2 - 32x + 256 + x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - x^2 + 32x - 256 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$-x^2 + 36x - 260 = 0 \rightarrow x^2 - 36x + 260 = 0$$

$$x = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 1 \cdot 260}}{2 \cdot 1} = \frac{36 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{36 \pm 16}{2} = \begin{cases} \frac{52}{2} = 26 \\ \frac{20}{2} = 10 \end{cases}$$

3º Redactamos la solución.

Si $x = 26$, la hipotenusa es 36 cm y los catetos son $26 - 2 = 24$ cm y $26 - 16 = 10$ cm

Si $x = 10$, la hipotenusa es 10 cm y los catetos son $10 - 2 = 8$ cm y $8 - 16 = -8$ cm. Esta solución no es válida porque es negativa.

S6. Ejercicios: pág. 139, ej. 30, 37, 38; pág. 140, ej. 46, 48.

S7. Ejercicios: Repaso. Ficha *Problemas de ecuaciones de primer grado y segundo grado*.

S8. Ejercicios: Repaso. Ficha *Ecuaciones de primer y segundo grado*.

S9. Ejercicios. *Pre-Examen 4. Ecuaciones*