

TEMA 5. LENGUAJE ALGEBRAICO

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejemplos: Describe mediante una expresión algebraica.

- a. Un número más tres. $x + 3$
- b. Un número aumentado en dos unidades. $x + 2$
- c. Un número disminuido en cinco unidades. $x - 5$
- d. La suma de dos números diferentes. $x + y$
- e. La diferencia de dos números diferentes. $x - y$
- f. El resultado de restarle tres unidades a un número. $x - 3$
- g. Mi edad hace 7 años. $x - 7$
- h. Mi edad dentro de 6 años. $x + 6$
- i. El doble de un número. $2x$
- j. El triple de un número aumentado en dos. $3x + 2$
- k. La mitad de un número. $x/2$
- l. La tercera parte de un número menos su quinta parte. $\frac{x}{3} + \frac{x}{5}$
- m. Un múltiplo de 7. $7x$
- n. El 20% de un número. $\frac{20}{100}x = 0.2x$
- o. Un número aumentado un 30%. $x + \frac{30}{100}x = x + 0.3x = 1.3x$
- p. Un número disminuido un 40%. $x - \frac{40}{100}x = x - 0.4x = 0.6x$
- q. El producto de dos números diferentes. $x \cdot y$
- r. El cociente de dos números diferentes. $\frac{x}{y}$
- s. Un número al cuadrado. x^2
- t. El cubo de un número. x^3
- u. La suma de dos números consecutivos. $x + (x + 1)$
- v. El producto de tres números consecutivos. $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$

S1: Ejercicios: pág. 108, ej. 1 a-c; pág. 118, ej. 1, 2, 3.

2. MONOMIOS

Un **MONOMIO** es el producto de un número (**COEFICIENTE**) por una o varias letras (**PARTE LITERAL**).

Ejemplo: $-3xy^2$

COEFICIENTE= -3

PARTE LITERAL: xy^2

2.1 SUMA Y RESTA DE MONOMIOS

SUMAMOS/RESTAMOS LOS COEFICIENTES de los monomios semejantes, es decir, CON la MISMA PARTE LITERAL.

Ejemplo: Reduce.

a. $-7x + 3y - 2x - 5y = -9x - 2y$

b. $-2x^2 + 3x - 5x + 6x^2 = 4x^2 - 2x$

c. $3xy - 2xy^2 + 5yx - 3x^2y = -3x^2y - 2xy^2 + 8xy$

2.2 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE MONOMIOS

1º Aplicamos la regla de signos.

$$(+) \cdot (+) = + \quad (+) \cdot (-) = - \quad (-) \cdot (+) = - \quad (-) \cdot (-) = +$$

2º Multiplicamos/dividimos los coeficientes y sumamos/restamos los exponentes de la parte literal.

Ejemplos: Efectúa las siguientes operaciones.

a. $(-7xy^2) \cdot (+3x^2y^3) = -21x^3y^5$

b. $(-30x^3y^2z) : (-6xyz) = +5x^2y$

c. $\left(\frac{3}{4}ab\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}a^4\right) = -\frac{3}{20}a^5b$

d. $\frac{3a^4b}{6a^2b^3} = \frac{a^2}{2b^2}$

S2: Ejercicios: pág. 109, ej. 2, 3, 4; pág. 118, ej. 6, 7.

3. POLINOMIOS

Un **POLINOMIO** es la suma o resta de uno o más monomios.

3.1 SUMA DE POLINOMIOS

Agrupamos los monomios semejantes.

Ejemplo: Calcula:

$$\begin{aligned} & (6x^2 - 4x + 1) + (x^3 + 2x^2 - 3x - 11) \\ & = 6x^2 - 4x + 1 + x^3 + 2x^2 - 3x - 11 = x^3 + 8x^2 - 7x - 10 \end{aligned}$$

3.2 RESTA DE POLINOMIOS

1º Cambiamos el signo de TODOS los monomios del sustraendo.

2º Agrupamos los monomios semejantes.

Ejemplo: Calcula:

$$\begin{aligned} & (6x^2 - 4x + 1) - (x^3 + 2x^2 - 3x - 11) = 6x^2 - 4x + 1 - x^3 - 2x^2 + 3x + 11 \\ & = -x^3 + 4x^2 - x + 12 \end{aligned}$$

3.3 MULTIPLICACIÓN DE UN MONOMIO POR UN POLINOMIO

Multiplicamos el monomio por TODOS los monomios del polinomio.

Ejemplos: Calcula:

$$\text{a) } (3x^2) \cdot (x^3 - 2x - 1) = 3x^5 - 6x^3 - 3x^2$$

$$\text{b) } 2x \cdot (x^2 - 3) - 3x^2 \cdot (x + 5) = 2x^3 - 6x - 3x^3 - 15x^2 = -x^3 - 15x^2 - 6x$$

S3. Ejercicios: pág. 110, ej. 2; pág. 118, ej. 8, 9, 10.

3.4 MULTIPLICACIÓN DE DOS POLINOMIOS

1º Multiplicamos TODOS los monomios del primer polinomio por TODOS los monomios del segundo polinomio.

2º Agrupamos los monomios semejantes.

Ejemplo 1: Calcula:

$$\begin{aligned}(5x^3 - 2x^2 - 1) \cdot (6x - 3) &= 30x^4 - 15x^3 - 12x^3 + 6x^2 - 6x + 3 = \\ &= 30x^4 - 27x^3 + 6x^2 - 6x + 3\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Calcula:

$$\begin{aligned}(x^2 - 8x - 1) \cdot (3x + 4) - 3 \cdot (2x^3 - x^2 - 5) &= \\ = 3x^3 + 4x^2 - 24x^2 - 32x - 3x - 4 - 6x^3 + 3x^2 + 15 &= \\ = -3x^3 + 17x^2 - 35x + 11\end{aligned}$$

S4. Ejercicios: pág. 118, ej. 11, 12; pág. 119, ej. 21.

3.5 PRODUCTOS NOTABLES

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejemplos: Desarrolla:

a) $(5x - 3)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3 + 3^2 = 25x^2 - 30x + 9$

b) $(2 + 4x)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4x + (4x)^2 = 4 + 16x + 16x^2$

c) $\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{1}{4} - x^2$

d) $(x^2 + 2)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2 = x^4 + 4x^2 + 4$

S5. Ejercicios: pág. 111, ej. 5, 6; pág. 118, ej. 13, 14.

3.6 OPERACIONES COMBINADAS

Ejemplo 1: Calcula:

$$\begin{aligned} & 3x(2x - 1) - x(x - 2)^2 - (x - 1)(x + 1) = \\ 1^\circ \text{ Productos notables} & = 3x(2x - 1) - x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 1) = \\ 2^\circ \text{ Multiplicamos} & = 6x^2 - 3x - x^3 + 4x^2 - 4x - x^2 + 1 = \\ 3^\circ \text{ Agrupamos} & = -x^3 + 9x^2 - 7x + 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Calcula:

$$\begin{aligned} & \frac{x \cdot (x - 3)}{2} + \frac{x \cdot (x + 2)}{4} - \frac{(3x + 2)^2}{8} = \\ 1^\circ \text{ Operamos los numeradores.} & \\ & = \frac{x^2 - 3x}{2} + \frac{x^2 + 2x}{4} - \frac{(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2}{8} = \\ & = \frac{x^2 - 3x}{2} + \frac{x^2 + 2x}{4} - \frac{9x^2 + 12x + 4}{8} = \end{aligned}$$

2º Reducimos a común denominador.

$$\begin{aligned} & = \frac{4 \cdot (x^2 - 3x)}{8} + \frac{2 \cdot (x^2 + 2x)}{8} - \frac{1 \cdot (9x^2 + 12x + 4)}{8} = \\ & = \frac{4x^2 - 12x + 2x^2 + 4x - 9x^2 - 12x - 4}{8} \end{aligned}$$

3º Agrupamos

$$= \frac{-3x^2 - 20x - 4}{8}$$

S6. Ejercicios: pág. 113, ej. 7, 9.

3.7 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Ejemplo: Calcula $(3x^3 + 5x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 3x + 2)$

<p>1º Colocamos el dividendo dejando huecos para los términos que falten.</p> <p>2º Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. El resultado será el primer término del cociente.</p>	$ \begin{array}{r} 3x^4 \quad +5x^3 \quad -2x \quad +3 \\ -3x^4 \quad +9x^3 \quad -6x^2 \\ \hline / \quad 14x^3 \quad +6x^2 \quad -2x \quad +3 \\ -14x^3 \quad +42x^2 \quad -28x \\ \hline / \quad 36x^2 \quad -30x \quad +3 \\ 36x^2 \quad +108x \quad -72 \\ \hline / \quad 78x \quad -69 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 - 3x + 2 \\ \hline 3x^2 + 14x + 36 \end{array} $
--	--	---

$3x^4 : x^2 = 3x^2$
 $14x^3 : x^2 = 14x$
 $36x^2 : x^2 = 36$

3º Multiplicamos este término por el divisor y colocamos el resultado CAMBIADO DE SIGNO bajo el dividendo.

$$\begin{aligned}
 3x^2 \cdot x^2 &= 3x^4 \\
 3x^2 \cdot (3x) &= -9x^3 \\
 3x^2 \cdot 2 &= 6x^2 \\
 \\
 14x \cdot x^2 &= 14x^2 \\
 14x \cdot (-3x) &= -42x^2 \\
 14x \cdot 2 &= 28x \\
 \\
 36 \cdot x^2 &= 36x^2 \\
 36x \cdot (-3x) &= -108x \\
 36 \cdot 2 &= 72
 \end{aligned}$$

4º Sumamos.

5º Repetimos el proceso hasta que el grado del resto sea menor que el grado del cociente.

S7. Ejercicios: pág. 116, ej. 1; pág. 119, ej. 25.

3.8 DIVISIÓN POR RUFFINI

Para dividir un polinomio por $(x - a)$ o $(x + a)$ podemos utilizar la regla de Ruffini.

Ejemplo: Realiza la división utilizando la regla de Ruffini.

$$(5x^4 - 41x^2 + 17x - 4) : (x - 3)$$

1º Colocamos los coeficientes del dividendo y el OPUESTO del divisor.

2º Bajamos el primer número.

3º Multiplicamos en diagonal.

4º Sumamos el vertical.

5º Añadimos las letras.

	5	0	-41	17	-41
+3					
	15	45	12	87	
	5x ³	+15x ²	+4x	+29	46

Cociente: $5x^3 + 15x^2 + 4x + 29$

Resto: 46

S8. Ejercicios: pág. 116, ej. 2; pág. 119, ej. 18.

3.9 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

FACTORIZAR un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios del menor grado posible. Para factorizar polinomios:

1º Extraemos factor común.

2º Transformamos en productos notables.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Ejemplo 1: Extrae factor común.

a) $3xy + 6x^2z + 9xyz = 3 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot z + 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot z =$
 $= 3x \cdot (y + 2xz + 3yz)$

b) $\frac{5}{2}xy^2 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{7}{2}x^2y^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot y - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y =$
 $= \frac{1}{2}xy \cdot (5y - 3x + 7xy)$

c) $3x(x + 1) - x^2(x + 1) + 5(x + 1) = (x + 1) \cdot (3x - x^2 + 5)$

Ejemplo 2: Factoriza.

a) $x^2 + 2x + 1$

$$x^2 = a^2 \rightarrow a = x; 1 = b^2 \rightarrow b = 1; 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot x \cdot 1 = 2x$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

b) $9x^4 - 12x^3 + 4x^2$

$$9x^4 = a^2 \rightarrow a = 3x^2; 4x^2 = b^2 \rightarrow b = 2x; 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot 3x^2 \cdot 2x = 12x^3$$

$$9x^4 - 12x^3 + 4x^2 = (3x^2 - 2x)^2$$

c) $4x^2 - 25x^4$

$$4x^2 = a^2 \rightarrow a = 2x; 25x^4 = b^2 \rightarrow b = 5x^2$$

$$4x^2 - 25x^4 = (2x + 5x^2) \cdot (2x - 5x^2)$$

d) $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$

$$x^2 = a^2 \rightarrow a = x; 4 = b^2 \rightarrow b = 2$$

$$x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$$

S9. Ejercicios: pág. 113, ej. 4, 5; pág. 118, ej. 15. (pág. 119, ej. 22, 23, 24)

S10. Ejercicios: Repaso. Ficha *Operaciones con monomios y polinomios*.

S11. Ejercicios: Repaso. Ficha *División de polinomios*.

S12. Ejercicios: Repaso. Ficha *Factorización de polinomios*.

S13. Ejercicios: Repaso. Pre-Examen 3. Lenguaje algebraico.