TEMA 3. DIVISIBILITAT

1. LA RELACIÓ DE DIVISIBILITAT

Dos nombres estan emparentats per la RELACIÓ DE DIVISIBILITAT quan un conté a l'altre una quantitat exacta de vegades, es a dir, quan la seua DIVISIÓ és EXACTA.

Exemple: Digues si els nombres estan emparentats per la relació de divisibilitat:

- 60 i 15. Sí, la divisió és exacta. 60 és DIVISIBLE per 15.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 15 \\ \cline{2-2} 00 & 4 \end{array}$$

- 60 i 25. No, la divisió no és exacta. 60 NO és DIVISIBLE per 25.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 25 \\ \cline{2-2} 10 & 2 \end{array}$$

2. ELS MULTIPLES I ELS DIVISORS

Quan dos nombres estan emparentats per la relació de divisibilitat:

- El major és MÚLTIPLE del menor.
- El menor és DIVISIOR del major.

Exemple: 40 i 8

$$\begin{array}{r|l} 40 & 8 \\ \cline{2-2} 00 & 5 \end{array}$$

- 40 és DIVISIBLE per 8.
- 40 és MÚLTIPLE de 8.
- 8 és DIVISIOR de 40.
- 5 és DIVISOR de 40.

S1: Exercicis: pàg. 63, Per fixar idees: ex. 1, 2, 3; Per practicar: ex. 1, 2, 3.

2.1 CÀLCUL DELS MÚLTIPLES D'UN NOMBRE

Els MÚLTIPLES d'un nombre s'obtenen al MULTIPLICAR el nombre però qualsevol altre nombre natural.

Un nombre té INFINITS MÚLTIPLES.

Exemple: Calcula els cinc primers múltiples de 7.

$$7 \cdot 1 = 7$$

$$7 \cdot 2 = 14$$

$$7 \cdot 3 = 21$$

$$7 \cdot 4 = 28$$

$$7 \cdot 5 = 35$$

Exemple: Calcula els múltiples de 17 compresos entre 150 i 200.

1r Busquem el número pel qual he de multiplicar 17 per obtenir un múltiple proper a 150.

$$\begin{array}{r|l} 150 & 17 \\ \cline{2-2} 14 & 8 \end{array}$$

Com que no dona exacte amb el 8 ens quedem curts, utilitzarem el següent número natural. 8 +1=9

2º Multipliquem per 17 totes les vegades que sigui necessari fins a obtenir un nombre més gran que 200.

$$17 \cdot 9 = 153$$

$$17 \cdot 10 = 170$$

$$17 \cdot 11 = 187$$

$$17 \cdot 12 = 204$$

Els múltiples son: 153, 170 i 187.

S2. Exercicis: pàg. 66, ex. 1, 2, 3, 4; pàg. 76, ex. 1a b.

2.2 CÀLCUL DELS DIVISORS D'UN NOMBRE

Per a obtindre els DIVISORS d'un nombre busquem les DIVISIONS EXACTES.

Un nombre té FINITS DIVISORS.

Com que el 5 ja el tenim parem. Ja no n'hi ha més.

<u>Exemple:</u> Busca tots els divisors de 20.

20	1	20	2	20	3	20	4	20	5
00	20	00	10	2	6	0	5	0	4

Els divisors son: 1, 2, 4, 5, 10 i 20.

S3. Exercicis: pàg. 66, ex. 5; pàg 76, ex. 2, 3.

3. <u>CRITERIS DE DIVISIBILITAT</u>

Els CRITERIS DE DIVISIBILITAT son regles pràctiques que serveixen per a descobrir si nombre es divisible per altre sense realitzar la divisió.

- DIVISIBILITAT PER 2. Un nombre es divisible per 2 si acaba en xifra parell: 0, 2, 4, 6, 8. (Exemples orals)
- DIVISIBILITAT PER 5. Un nombre es divisible per 5 si acaba en: 0 o 5. (Exemples orals)
- DIVISIBILITAT PER 10. Un nombre es divisible per 10 si acaba en: 0. (Exemples orals)
- DIVISIBILITAT PER 3. Un nombre es divisible per 3 si la suma de les seues xifres es múltiple de 3.

  <u>Exemple:</u>

  - $375 \rightarrow 3+7+5=15 \rightarrow 15=3\cdot 5 \rightarrow 15 \text{ és } mútiple\ de\ 3$

    375 és divisible per 3.
  - $413 \rightarrow 4+1+3=8 \rightarrow 8\ no\ \text{és}\ mútiple\ de\ 3$

    413 no és divisible per 3.
- DIVISIBILITAT PER 9. Un nombre es divisible per 9 si la suma de les seues xifres es múltiple de 9.

  <u>Exemple:</u>

  - $189 \rightarrow 1+8+9=18 \rightarrow 18=9\cdot 2 \rightarrow 18 \text{ és } mútiple\ de\ 9$

    189 és divisible per 9.
  - $363 \rightarrow 3+6+3=12 \rightarrow 12\ no\ \text{és}\ mútiple\ de\ 9$

    363 no és divisible per 9.

- DIVISIBILITAT PER 11. Un nombre es divisible per 11 si la suma de les xifres de lloc parell menys la suma de les xifres de lloc imparell és 0 o un múltiple d'11.

  Exemple:

  - $374 \rightarrow \begin{cases} 7 \\ 3+4=7 \end{cases} \rightarrow 7-7=0$

    374 és divisible per 11.

  - $3817 \rightarrow \begin{cases} 8+7=15 \\ 3+1=4 \end{cases} \rightarrow 15-4=11$

    3817 és divisible per 11.

  - $4031 \rightarrow \begin{cases} 0+1=1 \\ 4+3=7 \end{cases} \rightarrow 7-1=6$

    4031 no és divisible per 11.

S4. Exercicis: pàg. 66, ex. 8, 9, 10, 11; pàg. 76, ex. 4, 5.

4. NOMBRES PRIMERS I COMPOSTOS

Els nombres COMPOSTOS son aquells que es poden expressar com a multiplicació de dos nombres diferents de 1.

Exemple: $6 = 2 \cdot 3$ 6 És compost.

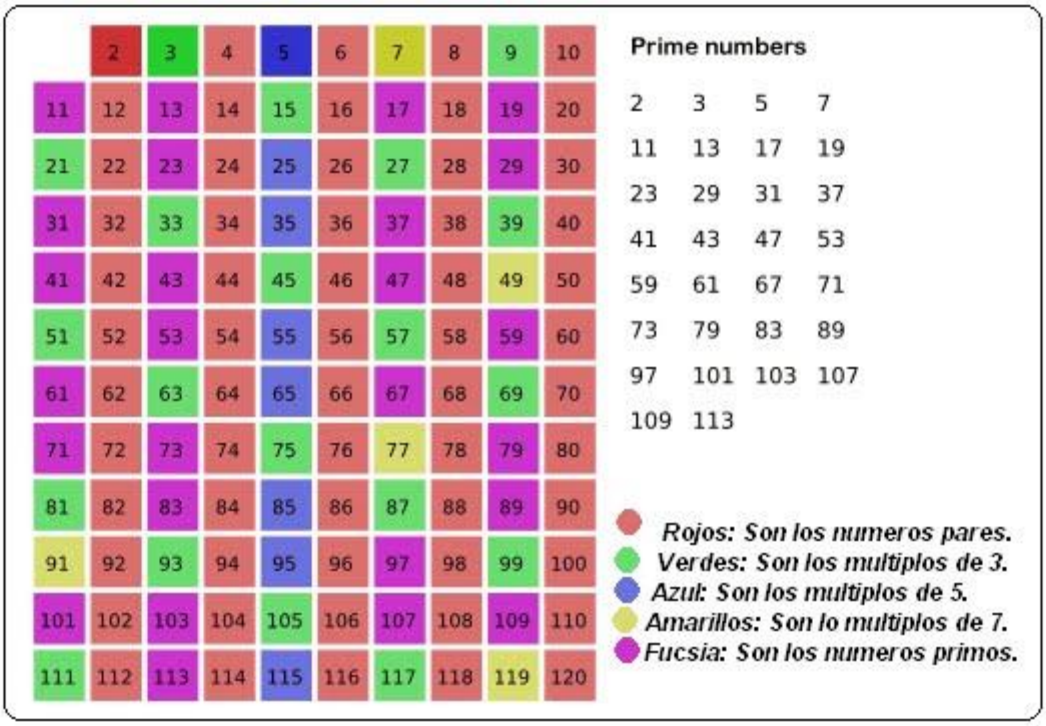
Els nombres PRIMERS són aquells que només es poden poder com a multiplicació d'ells mateixos per 1.

Els nombres primers només tenen dos divisors: ell mateix i 1.

Exemple: $13 = 1 \cdot 13$ 13 és primer.

4.1 CÀLCUL DE TOTS ELS NOMBRES PRIMERS

LA CRIBA DE ERATOSTENES



S5. Exercicis: pàg. 67, ex. 1, 2, 4; pàg. 76, ex. 6.

5. DESCOMPOSICIÓ EN FACTORS PRIMERS

Per a DESCOMPONDRE UN NOMBRE EN ELS SEUS FACTORS PRIMERS (factoritzar) l'anem dividint entre els seus factors PRIMERS (2, 3, 5, 7, 11, 13, ...) fins a obtindre 1 en el quocient.

Exemple:Descompon 792 en factors primers

	Nombres Primers	
792	2	792:2=396
396	2	396:2=198
198	2	198:2=99
99	3	99:3=33
33	3	33:3=11
11	11	11:11=1
1		

$$729 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

S6. Exercicis: pàg. 68, ex. 2, 4, 5; (pàg.76, ex. 8)

6. MÍNIM COMÚ MÚLTIPLE

El MÍNIM COMÚ MÚLTIPLE és el MENOR dels MÚLTIPLES COMUNS de dos o més nombres.

Exemple: Calcula el $mcm(10, 15)$

Múltiples de 10	10	20	30	40	50	60	70	...
Múltiples de 15	15	30	45	60	75	90	105	...

El menor dels múltiples comuns és 30.

$$mcm(10, 15) = 30$$

6.1 CÀLCUL DEL MCM

Per a calcular el mínim comú múltiple de diversos nombres:

1r Es descomponen els nombres en factors primers.

2n Es prenen TOTS els factors primers (comuns i no comuns) elevat cada un al major exponent amb què apareix.

3r Es multipliquen els factors elegits.

Exemple: Calcula el $mcm(20, 30)$

1r Es descomponen els nombres en factors primers.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$20 = \boxed{2^2} \cdot 5 \qquad 30 = \boxed{2} \cdot 3 \cdot 5$$

2n Es prenen TOTS els factors primers (comuns i no comuns) elevat cada un al MAJOR exponent amb què apareix.

$$mcm(20, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

3r Es multipliquen els factors elegits.

$$mcm(20, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$$

S7. Exercicis: pàg. 75, ex. (1, 2, 3) 4, 5, 7; pàg. 76, ex. 11 (mcm)

7. MÀXIM COMÚ DIVISOR

El MÀXIM COMÚ DIVISOR és el major dels divisors comuns de dos o més nombres.

Exemple: Calcula el $mcd(20, 30)$

Els divisors de 20 son: 1, 2, 4, 5, 10, 20.

20	1	20	2	20	3	20	4	20	5
0	20	0	10	2	6	0	5	0	4

Els divisors de 30 son: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

30	1	30	2	30	3	30	4	30	5	30	6
0	30	0	15	0	10	2	7	0	6	0	5

Els divisors comuns son: 1, 2, 5, 10.

El major divisor comú es 10.

7.1 CÀLCUL DEL MÀXIM COMÚ DIVISOR

Per a calcular el màxim comú divisor de diversos nombres:

1r Es descomponen els nombres en factors primers.

2n Es prenen només els factors primers COMUNS, elevat cada un al MENOR exponent amb què apareix.

3r Es multipliquen els factors elegits.

Exemple: Calcula el $mcd(40, 60)$

1r Es descomponen els nombres en factors primers.

40	2	60	2
20	2	30	2
10	2	15	3
5	5	5	5
1		1	

$$40 = \boxed{2^3} \cdot 5 \qquad 60 = \boxed{2^2} \cdot 3 \cdot 5$$

2n Es prenen només els factors primers COMUNS, elevat cada un al MENOR exponent amb què apareix.

$$mcd(40, 60) = 2^2 \cdot 5$$

3r Es multipliquen els factors elegits.

$$mcd(40, 60) = 2^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$$

S8. Exercicis: pàg. 75, ex. (1, 2, 3), 4, 5, 6; pàg. 76, ex. 11 (mcd)

8. PROBLEMES

8.1 M.C.M

Per reconèixer els problemes de mcm hem d'observar algunes paraules clau:

El mcm és:

- Un MÚLTIPLE, és a dir, un nombre més gran o futur, conseqüència d'una repetició periòdica.

- El MÍNIM, el més petit possible, com més aviat possible, ...

<u>Exemple:</u> En un carrer s'estan instal·lant dos semàfors: un es posarà en verd cada 75 segons i l'altre cada 90 segons. Un cop es connecten els semàfors, quant de temps tardaran a posar-se en verd alhora per primera vegada?

75	3		90	2
25	5		45	3
5	5		15	3
1			5	5
			1	

$$75 = 3 \cdot 5^2 \qquad 60 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$mcm(75, 90) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^{''} = 2 \cdot 9 \cdot 25 = 18 \cdot 25 = 450\ segons$$

S9. Exercicis: pàg. 72, ex. 8, 9, 10; pàg. pàg. 77, ex. 25, 28

8.2 M.C.D

Per reconèixer els problemes de mcd hem d'observar alguns problemes clau:

El mcd és:

- Un DIVISOR, és a dir, un nombre més petit conseqüència de dividir, repartir, agrupar,...

- Amb el MAJOR nombre possible d'elements.

<u>Exemple:</u> En un magatzem volem envasar 200 kg de pomes i 260 kg de taronges en calaixos del mateix pes i amb la major càrrega possible. Quants kg han de posar a cada calaix?

200	2		260	2
100	2		130	2
50	2		65	5
25	5		13	13
5	5		1	
1				

$$200 = 2^3 \cdot 5^2 \qquad 260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$$

$$mcd(200, 260) = 2^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20\ kg\ en\ cada\ caixa$$

$$200 : 20 = 10\ caixes\ de\ pomes$$

$$260 : 20 = 13\ caixes\ de\ taronges$$

S10. Exercicis: pàg. 75, ex. 8, 9, 10; pàg. 77, ex. 22, 24, 29.

S11. Exercicis: Fitxa *Problemes de divisibilitat*

S12. Exercicis: *Pre-Examen 3. Divisibilitat*