TEMA 2. ÁLGEBRA

1. BIONOMIO DE NEWTON

1.1. NÚMEROS COMBINATORIOS

Un NÚMERO COMBINATORIO se define como:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Representa todas las formas en que se pueden tomar r elementos de un grupo de n sin que influya el orden.

Ejemplo: Si queremos seleccionar al azar 3 alumnos de un grupo de 10, ¿cuántas formas hay de hacerlo?

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120\ formas\ de\ hacerlo$$

❖ En la calculadora existe una tecla para calcular los números combinatorios: nCr

1.2. BIONOMIO DE NEWTON

El BINOMIO DE NEWTON es una generalización de los productos notables:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

Ejemplo: Calcula el desarrollo de $(x-2)^5$

$$(x-2)^5 = \binom{5}{0} \cdot x^5 \cdot (-2)^0 + \binom{5}{1} \cdot x^4 \cdot (-2)^1 + \binom{5}{2} \cdot x^3 \cdot (-2)^2$$
$$+ \binom{5}{4} \cdot x^1 \cdot (-2)^4 + \binom{5}{5} \cdot x^0 \cdot (-2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$$

S1. Ejercicios: pág. 41, ej. 8; pág. 64, ej. 38, 39.

2. ECUACIONES

2.1. ECUACIONES BICUADRADAS

Las ecuaciones bicuadradas son de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

1º Para resolver la ecuación efectuamos el cambio $x^{2n} = y^2, x^n = y$ con lo que queda una ecuación de segundo grado con la incógnita y:

$$ay^2 + by + c = 0$$

2º Resolvemos la ecuación de segundo grado.

3º Deshacemos el cambio y calculamos el valor de x. $x = \pm\sqrt[n]{y}$

Ejemplos: Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

1º Realizamos el cambio $y = x^2 \rightarrow y^2 - 10y + 9 = 0$

2º Resolvemos de ecuación de segundo grado:

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{18}{2} = 9 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

3º Deshacemos el cambio: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3; x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

b) $x^{10} - 33x^5 + 32 = 0$

1º Realizamos el cambio $y = x^5 \rightarrow y^2 - 33y + 32 = 0$

2º Resolvemos de ecuación de segundo grado:

$$y = \frac{33 \pm \sqrt{(-33)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32}}{2} = \frac{33 \pm \sqrt{1089 - 128}}{2} = \frac{33 \pm \sqrt{961}}{2} = \frac{33 \pm 31}{2} = \begin{cases} \frac{64}{2} = 32 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

3º Deshacemos el cambio: $x = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2; x = \sqrt{1} = 1$

c) $x^4 - 5x^2 = 0$

1º Realizamos el cambio $y = x^2 \rightarrow y^2 - 5y = 0$

2º Resolvemos de ecuación de segundo grado:

$$y(y-5) = 0;$$

$$y = 0,$$

$$y - 5 = 0\; y = 5$$

3º Deshacemos el cambio: $x = \pm\sqrt{0} = 0; x = \pm\sqrt{5}$

S2. Ejercicios: pág. 45, ej. 14; pág. 65, ej. 47, 48.

2.2 ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A DOS

Son ecuaciones polinómicas que pueden factorizarse.

1º Extraemos factor común si es posible.

2º Aplicamos la regla de Ruffini hasta que el grado del mayor factor sea dos.

3º Aplicamos la fórmula de la ecuación de segundo grado.

Ejemplo: Resuelve la siguiente ecuación $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x = 0$

1º Sacamos factor común

$$x(x^3 + x^2 - 4x - 4) = 0$$

2º Aplicamos la regla de Ruffini

	1	1	-4	-4
2		2	6	4
	$1x^2$	$+3x$	+2	0

3º Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -\dfrac{2}{2} = -1 \\ -\dfrac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

4º Las soluciones son:

$$\{x = 0, x = 2, x = -1, x = -2$$

S2. Ejercicios: pág. 45, ej. 15; pág. 65, ej. 49.

2.3 ECUACIONES CON RADICALES

Son ecuaciones en las que x se encuentra bajo una raíz cuadrada.

CASO 1. Una raíz cuadrada

<u>Ejemplo:</u> Resuelve la ecuación $\sqrt{2x-3}+1=x$

1º Aislamos la raíz en un lado de la igualdad.

$$\sqrt{2x-3}=x-1$$

2º Elevamos al cuadrado ambos lados.

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=(x-1)^2$$

3º Eliminamos la raíz cuadrada y desarrollamos el producto notable.

$$2x-3=x^2-2x+1$$

$$2x-3-x^2+2x-1=0$$

$$-x^2+4x-4=0$$

4º Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{-2}=\frac{-4\pm\sqrt{0}}{-2}=\frac{-4}{-2}=2$$

5º Comprobamos si la solución es válida:

$\sqrt{2\cdot 2-3}+1=\sqrt{4-3}+1=\sqrt{1}+1=2$

La solución es válida.

S4. Ejercicios: pág. 65, ej. 50; pág. 45, ej. 16 a, b, c.

CASO 2. Dos raíces cuadradas.

<u>Ejemplo:</u> Resuelve la ecuación $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+7}=4$

1º Aislamos una de las dos raíces en un lado de la igualdad.

$$\sqrt{2x-3}=4-\sqrt{x+7}$$

2º Elevamos al cuadrado ambos lados.

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=\left(4-\sqrt{x+7}\right)^2$$

3º Eliminamos la raíz cuadrada y desarrollamos el producto notable.

$$2x-3=4^2-2\cdot 4\cdot\sqrt{x+7}+\left(\sqrt{x+7}\right)^2$$

$$2x-3=16-8\sqrt{x+7}+x+7$$

4º Aislamos la raíz a un lado de la igualdad:

$$8\sqrt{x+7} = 16 + x + 7 - 2x + 3$$

$$8\sqrt{x+7} = 26 - x$$

5º Elevamos al cuadrado ambos lados.

$$\left(8\sqrt{x+7}\right)^2 = (26-x)^2$$

$$64(x+7) = 676 - 52x + x^2$$

$$64x + 448 = 676 - 52x + x^2$$

$$-x^2 + 116x - 228 = 0$$

6º Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-116 \pm \sqrt{116^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-228)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-116 \pm \sqrt{12544}}{-2} = \frac{-116 \pm 112}{-2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ \dfrac{-228}{-2} = 114 \end{cases}$$

5º Comprobamos si la solución es válida:

$\sqrt{2 \cdot 2 - 3} + \sqrt{2+7} = \sqrt{4-3} + \sqrt{9} = 1 + 3 = 4$

La solución es válida.

$\sqrt{2 \cdot 114 - 3} + \sqrt{114+7} = \sqrt{225} + \sqrt{121} = 15 + 11 = 26 \neq 4$

La solución no es válida.

S5. Ejercicios: pág. 65, ej. 51; pág. 45, ej. 16 d.

2.4 ECUACIONES RACIONALES

Son ecuaciones con denominadores algebraicos.

<u>Ejemplo</u>: Resuelve la ecuación $\frac{x}{x-3} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{x^2-3}{x^2-2x-3}$

1º Factorizamos los denominadores y calculamos el mcm:

$$\left.\begin{array}{c} x-3 \\ x+1 \\ x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \end{array}\right\} mcm = (x-3)(x+1)$$

2º Reducimos a común denominador:

$$\frac{x(x+1)}{(x-3)(x+1)} - \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x^2-3}{(x-3)(x+1)}$$

3º Eliminamos los denominadores y resolvemos la ecuación:

$$x(x+1)-(x+3)(x-3)=x^2-3$$

$$x^2+x-(x^2-9)=x^2-3$$

$$x^2+x-x^2+9=x^2-3$$

$$-x^2+x+12=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot(12)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{-2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{-2}=\frac{-1\pm 7}{-2}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{6}{-2}=-3\\ \dfrac{-8}{-2}=4\end{cases}$$

4º Comprobamos que las soluciones son válidas.

Si $x=-3\to\frac{-3}{-3-3}-\frac{-3+3}{-3+1}=\frac{(-3)^2-3}{(-3)^2-2\cdot(-3)-3}\to\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\to Solución\ válida$

Si $x=4\to\frac{4}{4-3}-\frac{4+3}{4+1}=\frac{4^2-3}{4^2-2\cdot 4-3}\to\frac{13}{5}=\frac{13}{5}\to Solución\ válida$

S6. Ejercicios: pág. 65, ej. 60 a,b,c,e; pág. 47, ej. 20.

2.5 ECUACIONES EXPONENCIALES

TIPO 1. **Potencias de igual base**. $a^{f(x)}=a^{\mathrm{g(x)}}$

Ejemplos: Resuelve la siguiente ecuación $3^{1-x^2}=\frac{1}{27}$

1º Escribimos ambos lados como potencia de la misma base.

$$3^{1-x^2}=3^{-3}$$

2º Igualamos los exponentes y resolvemos la ecuación:

$$1-x^2=-3;\ x^2=4, x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

TIPO 2. **Potencias de diferente base**. $a^{f(x)}=b$

Ejemplos: Resuelve la siguiente ecuación $7^{2\mathrm{x}-1}=18$

1º Aplicamos logaritmos a ambos lados. $log_7 7^{2x-1}=log_7 18$

2º Aplicamos las propiedades de los logaritmos.

$$(2x-1)log_7 7=log_7 18;\ (2x-1)\cdot 1=log_7 18; 2\mathrm{x}-1=log_7 18; \mathrm{x}=\frac{log_7 18+1}{2}$$

S7. Ejercicios: pág. 47, ej. 19 a, b, d; pág. 65, ej. 56.

TIPO 3. **Suma y resta de potencias con sumas y restas en el exponente.**

$$a^{x+m} + a^{\mathrm{x+n}} = b$$

<u>Ejemplos</u>: Resuelve la siguiente ecuación $2^x + 2^{x+1} = 12$

1º Aplicamos la propiedad de las potencias $a^{n+m} = a^m \cdot a^n$ y separamos las potencias con sumas o restas en los exponentes en varias potencias:

$$2^x + 2^x \cdot 2^1 = 12$$

2º Hacemos el cambio de variable $y = 2^x$

$$y + y \cdot 2^1 = 12$$

$$y + 2y = 12$$

$$3y = 12$$

$$y = \frac{12}{3} = 4$$

3º Deshacemos el cambio

$$2^x = 4;\ 2^x = 2^2; x = 2$$

TIPO 3. **Suma y resta de potencias con multiplicaciones en el exponente.**

$$a^x + a^{\mathrm{nx}} = b$$

<u>Ejemplos</u>: Resuelve la siguiente ecuación $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

1º Hacemos un cambio de variable: $y = 3^x, y^2 = 3^{2x}$

$$y^2 - 10\mathrm{y} + 9 = 0$$

2º Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \dfrac{18}{2} = 9 \\ \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

3º Deshacemos el cambio

$$3^x = 9;\ 3^x = 3^2; x = 2$$

$$3^x = 1; x = 0$$

S8. Ejercicios: pág. 47, ej. 19 c, e, f; pág. 65, ej. 57 a, b, d, 58.

2.6 ECUACIONES LOGARÍTMICAS

TIPO 1: $\log f(x) = \log g(x)$

Ejemplo: Resuelve la ecuación $2logx = \log(10-3x)$

1º Aplicamos las propiedades de los logaritmos para unir en un único logaritmo

$$\log x^2 = \log(10-3x)$$

2º Eliminamos los logaritmos, igualamos las dos expresiones y resolvemos la ecuación

$$x^2 = 10 - 3x$$

$$x^2 + 3x - 10 =$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

3º Comprobamos si la solución es válida sustituyendo y teniendo en cuenta que solo existe el logaritmo de un número positivo.

$$Si\ x = 2 \rightarrow 2log2 = \log(10 - 3 \cdot 2) \rightarrow 2log2 = log4 \rightarrow log4 = log4 \rightarrow Solución\ válida$$

$$Si\ x = -5 \rightarrow 2\log(-5) = \log\big(10 - 3 \cdot (-5)\big) \rightarrow \nexists \log(-5) \rightarrow Solución\ noválida$$

TIPO 2: $\log f(x) = b$

Ejemplo: Resuelve la ecuación $log\ x + log\ 50 = 3$

1º Aplicamos las propiedades de los logaritmos para unir en un único logaritmo

$$\log 50x = 3$$

2º Transformamos el número en un logaritmo $log\ base^{número}$

$$\log 50x = \log 10^3$$

$$\log 50x = \log 1000$$

3º Eliminamos los logaritmos, igualamos las dos expresiones y resolvemos la ecuación

$$50x = 1000 \rightarrow x = \frac{1000}{50} = 20$$

4º Comprobamos si la solución es válida sustituyendo y teniendo en cuenta que solo *existe el logaritmo de un número positivo.*

$$Si\ x = 20 \rightarrow log\ 20 + log\ 50 = 3 \rightarrow log1000 = 3 \rightarrow 3 = 3 \rightarrow Solución\ válida$$

S9. Ejercicios: pág. 47, ej. 18; pág. 65, ej. 52, 53.

S10. Ejercicios. Ficha: Ecuaciones

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Para resolver los sistemas de tres ecuaciones lineales utilizaremos el método de Gauss.

3.1 . SISTEMAS COMPATIBLES DETERMINADOS

Los sistemas COMPATIBLES DETERMINADOS son los que tienen una única solución.

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 21 \\ \boxed{3x} + y - z = -18 \\ \boxed{2x} - y + 3z = 12 \end{cases}$$

1º Multiplicamos y sumamos para eliminar la x de la segunda y de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{r} E1 \\ E2 - 3 \cdot E1 \\ E3 - 2 \cdot E1 \end{array} \begin{cases} x & -3y & +4z = 21 \\ & 10y & -13z = -81 \\ & \boxed{5y} & -5z = -30 \end{cases}$$

2º Multiplicamos y sumamos para eliminar la y de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{c} E1 \\ E2 \\ 2 \cdot E3 - E2 \end{array} \begin{cases} x & -3y & +4z = 21 \\ & 10y & -13z = -81 \\ & & +3z = 21 \end{cases}$$

3º Resolvemos la tercera ecuación y despejamos el valor de z.

$$+3z = 21 \ \rightarrow z = \frac{21}{3} \rightarrow z = 7$$

4º Sustituimos el valor de z en la segunda ecuación y despejamos el valor de y.

$$10y - 13 \cdot 7 = -81 \rightarrow 10y - 91 = -81 \rightarrow 10y = 91 - 81 \rightarrow 10y = 10 \rightarrow y = 1$$

5º Sustituimos el valor de z e y en la primera ecuación y despejamos el valor de x.

$$x - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 7 = 21 \rightarrow x - 3 + 28 = 21 \rightarrow x = 21 + 3 - 28 \rightarrow x = -4$$

Solución: $x = -4, y = 1, z = 7$

S11. Ejercicios: pág. 66, ej. 63, 64. (pág. 51, ej. 22)

3.2. SISTEMAS INCOMPATIBLES

Los sistemas INCOMPATIBLES son los que no tienen solución.

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = 7 \\ \boxed{\begin{matrix} 2x \\ x - \end{matrix}} - y + 15z = 3 \\ 8y - 21z = 11 \end{cases}$$

1º Multiplicamos y sumamos para eliminar la x de la segunda y de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{c} E1 \\ E2 - 2\cdot E1 \\ E3 - E1 \end{array} \begin{cases} x & -3y & -2z = 7 \\ & 5y & +19z = -11 \\ & \boxed{-5y} & -19z = 4 \end{cases}$$

3º Multiplicamos y sumamos para eliminar la y de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{c} E1 \\ E2 \\ E3 + E2 \end{array} \begin{cases} x & -3y & -2z = 7 \\ & 5y & +19z = -11 \\ & & 0z = -7 \end{cases}$$

3º La tercera ecuación no puede resolverse, por tanto, el sistema no tiene solución.

$$0z = -7 \ \rightarrow No\ tiene\ solución$$

S12. Ejercicios: pág. 66, ej. 65 a, d; pág. 51, ej. 23 c, f.

3.3. SISTEMAS COMPATIBLES INDETERMINADOS

Los sistemas COMPATIBLES INDETERMINADOS son los que tienen infinitas soluciones.

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x & +4y & -4z = -2 \\ \boxed{3x} & +2y & -2z = 4 \\ \boxed{4x} & +y & -z = 7 \end{cases}$$

1º Multiplicamos y sumamos para eliminar la x de la segunda y de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{c} E1 \\ E2 - 3\cdot E1 \\ E3 - 4\cdot E1 \end{array} \begin{cases} x & +4y & -4z = -2 \\ & -10y & +10z = 10 \\ & \boxed{-15y} & +15z = 15 \end{cases}$$

2º Multiplicamos y sumamos para eliminar la y de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{c} E1 \\ E2 \\ 2\cdot E3 - 3\cdot E2 \end{array} \begin{cases} x & +4y & -4z = -2 \\ & -10y & +10z = 10 \\ & & 0z = 0 \end{cases}$$

3º La tercera ecuación no aporta nada. La suprimimos y nos quedamos con las otras dos.

$$\begin{cases} x \quad +4y \quad -4z = -2 \\ \quad -10y \quad +10z = 10 \end{cases}$$

4º Sustituimos la z por λ y despejamos la y de la segunda ecuación.

$$\begin{cases} x \quad +4y \quad -4\lambda = -2 \\ \quad -10y \quad +10\lambda = 10 \end{cases}$$

$$-10y = 10 - 10\lambda \to y = \frac{10\lambda - 10}{10} = \lambda - 1$$

5º Sustituimos el valor de y en la primera ecuación y despejamos el valor de x.

$$x + 4 \cdot (\lambda - 1) - 4\lambda = -2 \to x + 4\lambda - 4 - 4\lambda = -2 \to$$

$$x = -2 + 4$$

$$x = 2$$

Solución: $x = 2, y = \lambda - 1, z = \lambda$

S13. Ejercicios: pág. 66, ej. 65 b; pág. 51, ej. 23 b, e.

4. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Para resolver sistemas de dos ecuaciones no lineales utilizaremos dos procedimientos:

- Sustitución.
- Reducción.

En la resolución de sistemas que aparezcan raíces, fracciones o logaritmos será necesario comprobar las soluciones.

4.1 SUSTITUCIÓN

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \sqrt{x + y} + y = x \end{cases}$$

Resolvemos por el método de sustitución.

1º Despejamos una de las variables (x o y) en una de las dos ecuaciones:

$$y = 2x - 9$$

2º Sustituimos en la otra ecuación:

$$\sqrt{x + y} + y = x$$

$$\sqrt{x + 2x - 9} + 2x - 9 = x$$

$$\sqrt{3x - 9} + 2x - 9 = x$$

3º Resolvemos la ecuación:

$$\sqrt{3x-9} = 9 - x$$

$$\left(\sqrt{3x-9}\right)^2 = (9-x)^2$$

$$3x - 9 = 81 - 18x + x^2$$

$$x^2 - 21x + 90 = 0$$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{(-21)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 90}}{2 \cdot 1} = \frac{21 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{21 \pm 9}{2} = \begin{cases} x = 6 \\ x = 15 \end{cases}$$

4º Sustituimos en la primera ecuación para obtener la otra variable.

$$\begin{cases} x = 6 \rightarrow y = 2 \cdot 6 - 9 \rightarrow y = 3 \\ x = 15 \rightarrow y = 2 \cdot 15 - 9 \rightarrow y = 21 \end{cases}$$

5º Comprobamos las soluciones sustituyendo en el sistema inicial:

$$\begin{cases} 2 \cdot 6 - 3 = 9; 12 - 3 = 9; 9 = 9 \\ \sqrt{6+3} + 3 = 6;\ \sqrt{9} + 3 = 6; 3 + 3 = 6; 6 = 6 \end{cases} \quad Solución\ válida$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 15 - 21 = 9; 30 - 21 = 9; 9 = 9 \\ \sqrt{15+21} + 21 = 15;\ \sqrt{36} + 21 = 15; 6 + 21 = 6; 27 \neq 6 \end{cases} \quad Solución\ no\ válida$$

S14. Ejercicios: pág. 52, ej. 24 a, b, c; pág. 66, ej. 66 b, c, 67.

4.2 REDUCCIÓN

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de reducción.

1º Aplicamos las propiedades de las potencias y desarrollamos la segunda ecuación.

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^x \cdot 2^2 + 5^y \cdot 5^1 = 41 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^x + 5^y = 9 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{matrix}$$

2º Hacemos un cambio de variable $a = 2^x, b = 5^y$.

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ 4a + 5b = 41 \end{cases}$$

3º Resolvemos por reducción:

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ 4a + 5b = 41 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -4a - 4b = -36 \\ 4a + 5b = 41 \\ b = 5 \rightarrow a + 5 = 9 \rightarrow a = 4 \end{matrix}$$

4º Deshacemos el cambio de variable.

$$\begin{cases} a = 4 \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x = 2 \\ b = 5 \rightarrow 5^y = 5 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

S15. Ejercicios: pág. 52, ej. 24 d; pág. 66, ej. 66 a, d.

S16. Ejercicios. Ficha Sistemas de ecuaciones.

5. INECUACIONES

Una INECUACIÓN es una desigualdad entre expresiones algebraicas.

5.1 INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Para resolver las inecuaciones lineales con una incógnita despejamos la x como las ecuaciones.

IMPORTANTE. Al dividir entre un número negativo se cambia la desigualdad.

La solución de una inecuación es un intervalo.

Ejemplo: Resuelve $-2x + 1 < 7$.

1º Despejamos la x. $-2x < 7 - 1 \rightarrow -2x < 6 \rightarrow x > \frac{6}{-2} \rightarrow x > -3$

2º Expresamos la solución en forma de intervalo.

Solución: $(-3, \infty)$

5.2 INECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO MAYOR O IGUAL A DOS

Si $P(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual que 2, una inecuación polinómica será de la forma $P(x) < 0, P(x) \leq 0, P(x) > 0$ o $P(x) \geq 0$.

Para resolver estas inecuaciones:

1º Resolvemos la ecuación $P(x) = 0$.

2º Factorizamos $P(x)$.

3º Representamos sobre la recta real las soluciones obtenidas.

4º Estudiamos el signo de $P(x)$ en cada uno de los intervalos.

5º Elegimos el o los intervalos que cumplan la inecuación, dando la solución mediante un intervalo.

Ejemplo: Resuelve la inecuación $x^3 + 2x^2 - 3x < 0$

1º Resolvemos la ecuación:

$$x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

2º Factorizamos $P(x)$.

$$x(x-1)(x+3) < 0$$

3º Representamos sobre la recta real las soluciones obtenidas.

$-\infty$ (-4) | -3 (-1) | 0 (0.5) | 1 (+2) | $+\infty$

4º Estudiamos el signo de $P(x)$ en cada uno de los intervalos.

Sustituimos por $x = -4 \rightarrow -4 \cdot (-4-1) \cdot (-4+3) < 0$

Sustituimos por $x = -1 \rightarrow -1 \cdot (-1-1) \cdot (-1+3) > 0$

Sustituimos por $x = 0.5 \rightarrow 0.5 \cdot (0.5-1) \cdot (0.5+3) < 0$

Sustituimos por $x = 2 \rightarrow 2 \cdot (2-1) \cdot (2+3) > 0$

5º Elegimos el o los intervalos que cumplan la inecuación, dando la solución mediante un intervalo.

Solución: $(-\infty, -3) \cup (0,1)$

S17. Ejercicios: pág. 54, ej. 25; pág. 66, ej. 68.

5.3 INECUACIONES RACIONALES

Son inecuaciones de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ (o $\leq, >, \geq$)

Para resolver estas inecuaciones:

1º Resolvemos las ecuaciones $P(x) = 0$ y $Q(x) = 0$.

2º Factorizamos$\frac{P(x)}{Q(x)}$.

3º Representamos sobre la recta real las soluciones obtenidas.

4º Estudiamos el signo de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en cada uno de los intervalos.

5º Elegimos el o los intervalos que cumplan la inecuación, dando la solución mediante un intervalo.

Ejemplo: Resuelve la inecuación $\frac{x^2-x}{x+1} \geq 0$

1º Resolvemos la ecuación:

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases} \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

IMPORTANTE: En los valores en los que el denominador es cero nunca existe la fracción y por tanto no se puede incluir ese valor (siempre con paréntesis).

2º Factorizamos $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

$$\frac{x(x-1)}{x+1} \geq 0$$

3º Representamos sobre la recta real las soluciones obtenidas.

$-\infty$ (-2) | -1 (-0.5) | 0 (0.5) | 1 (+2) | $+\infty$

4º Estudiamos el signo de $P(x)$ en cada uno de los intervalos.

Sustituimos por $x = -2 \rightarrow \frac{-2(-2-1)}{-2+1} < 0$

Sustituimos por $x = -0.5 \rightarrow \frac{-0.5(-0.5-1)}{-0.5+1} > 0$

Sustituimos por $x = 0.5 \rightarrow \frac{0.5(0.5-1)}{0.5+1} < 0$

Sustituimos por $x = 2 \rightarrow \frac{2(2-1)}{2+1} > 0$

5º Elegimos el o los intervalos que cumplan la inecuación, dando la solución mediante un intervalo.

Solución: $(-1, 0] \cup [1, +\infty)$

S17. Ejercicios: pág. 54, ej. 26; pág. 66, ej. 69.

5.4 INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Son aquellas en las que la incógnita está dentro de un valor absoluto.

CASO 1:

$$|P(x)| > a \rightarrow \begin{cases} P(x) < -a \\ P(x) > a \end{cases}$$

CASO 2:

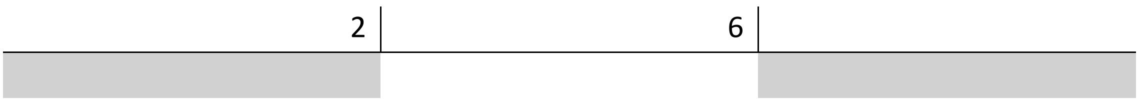
$$|P(x)| < a \rightarrow \{-a < P(x) < a$$

Ejemplo 1: Resuelve $|x-4| > 2$

1º Aplicamos la definición de valor absoluto.

$$\begin{cases} x-4 < -2 \rightarrow x < -2+4 \rightarrow x < 2 \\ x-4 > 2 \rightarrow x > 2+4 \rightarrow x > 6 \end{cases}$$

2º Representamos las soluciones en la recta real y tomamos la unión de ambas.



$$Solución: (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$$

Ejemplo 2: Resuelve $|2x+1| \leq 3$

1º Aplicamos la definición de valor absoluto.

$$-3 \leq 2x+1 \leq 3$$

2ºResolvemos

$$-3-1 \leq 2x \leq 3-1 \rightarrow -4 \leq 2x \leq 2 \rightarrow \frac{-4}{2} \leq x \leq \frac{2}{2}$$

$$-2 \leq x \leq 1 \rightarrow Solución: [-2, 1]$$

S18. Ejercicios: pág. 27, ej. 43.

6. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

La solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es la intersección de los dos semiplanos.

1º Dibujamos en unos ejes cartesianos las diferentes rectas.

2º Para cada una de las rectas, escogemos un punto de una de las dos regiones y vemos si el punto cumple la inecuación.

3º Establecemos la región factible, la intersección de las zonas sombreadas.

Ejemplo: Resuelve el sistema de inecuaciones lineales

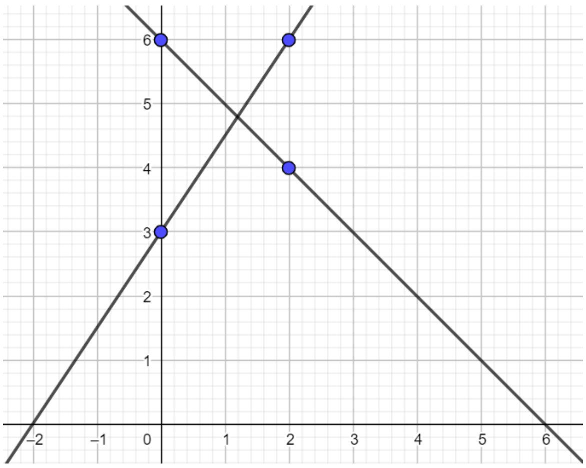
$$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 3x - 2y \geq -6 \end{cases}$$

1º Despejamos la y, damos valores a la x, calculamos dos puntos de cada recta y dibujamos las rectas.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} y = 6 - x \\ -2y = -6 - 3x \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y = 6 - x \\ y = \dfrac{6 + 3x}{2} \end{matrix}$$

x	y
0	$y = 6 - 0 = 6$
2	$y = 6 - 2 = 4$

x	y
0	$y = \dfrac{6 + 3 \cdot 0}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$
2	$y = \dfrac{6 + 3 \cdot 2}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$



2º Tomamos un puto cualquiera, por ejemplo $(0, 0)$, y sustituimos en cada una de las inecuaciones para conocer el semiplano de cada una de ellas.

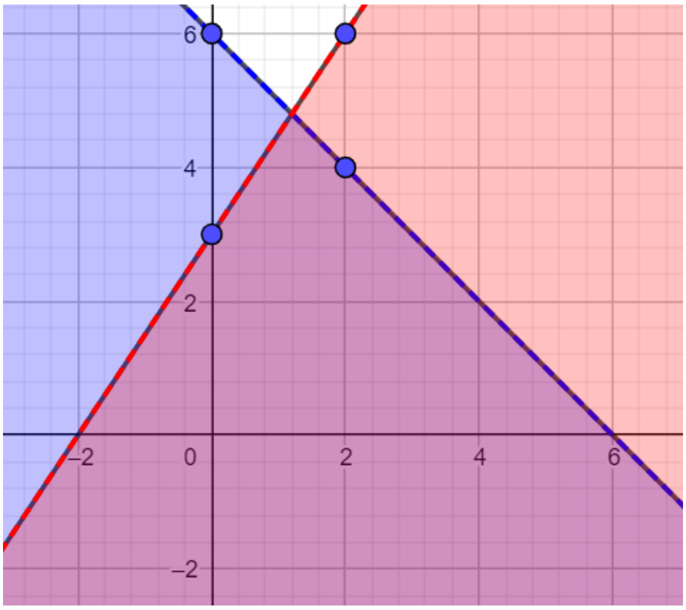
$0 + 0 \ \leq 6 \rightarrow 0 \leq 6$ Verdadero

$3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \geq -6 \rightarrow 0 \geq -6$ Verdadero

3º Establecemos la región factible, la intersección de las zonas sombreadas.

La solución será la intersección de ambos semiplanos.

Clara Benedicto Baldonado



S19. Ejercicios: pág. 56, ej. 27; pág. 66, ej. 71, 72.

S20. Ejercicios: Ficha Inecuaciones.

7. PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejemplo: Una tienda ha vendido 225 memorias USB de tres modelos diferentes, A, B, C y ha ingresado un total de 10500 euros. La memoria A cuesta 50 euros, y los modelos B y C son, respectivamente, un 10%, y un 40% más baratos que el modelo A. La suma de las unidades vendidas de los modelos B y C es la mitad de las vendidas del modelo A. Calcula cuántas unidades se han vendido de cada modelo.

$$\begin{matrix} x = nº\ de\ USB\ A \\ y = nº\ de\ USB\ B \\ z = nº\ de\ USB\ C \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 225 \\ 50x + 45y + 30z = 10500 \\ y + z = \dfrac{x}{2} \rightarrow 2y + 2z = x \rightarrow -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 225 \\ 50x + 45y + 30z = 10500 \\ y - x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1 \\ E2 - 50 \cdot E1 \\ E3 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x \quad +y \quad +z = 225 \\ \quad -5y \quad -20z = -750 \\ \quad 3y \quad 3z = 225 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} E1 \\ E2 \\ 5 \cdot E3 + 3 \cdot E2 \end{matrix} \begin{cases} x \quad +y \quad +z = 225 \\ \quad -5y \quad -20z = -750 \\ \quad -45z = -1125 \end{cases}$$

$$z = \frac{-1125}{-45} = 25$$

$$-5y - 20 \cdot 25 = -750 \rightarrow -5y = -750 + 500 \rightarrow -5y = -250 \rightarrow y = 50$$

$$x + 50 + 25 = 225 \ \rightarrow x = 225 - 50 - 25 \ \rightarrow x = 150$$

Se han vendido 150 USB de tipo A, 50 USB de tipo B y 25 USB de tipo C.

S21. Ejercicios: pág. 69, ej. 1, 2, 3, 4 y 5.

S22. Ejercicios: pág. 69, ej. 6, 7, 8, 9; pág. 70, ej. 10.

S23. Ejercicios: Ficha Problemas de Sistemas de Ecuaciones.

Repaso

S24. Ejercicios: pág. 74, ej. 1, 2, 5, 6, 8, 9, 10.

S25. Ejercicios: Pre-Examen 2. Álgebra.