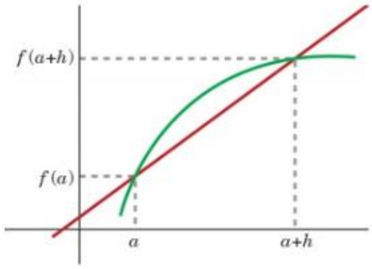
TEMA 11. DERIVADAS

1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Se llama **TASA DE VARIACIÓN MEDIA (TVM)** de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, a+h]$ al cociente:

$$TVM_{[a,a+h]} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Esta fórmula nos da el **promedio de variación** de la función en este intervalo.

Geométricamente, la tasa de variación media representa la **pendiente de la recta secante** que pasa por los puntos:

$\big(a, f(a)\big)$ y $\big(a+h, f(a+h)\big)$

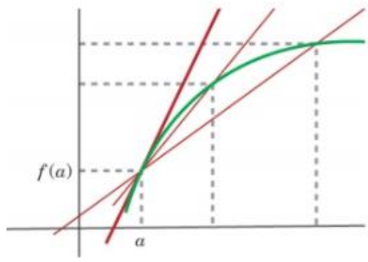
Ejemplo: Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = 3^x$ en el intervalo $[1, 4]$.

$$TVM_{[1,4]} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{3^4 - 3^1}{3} = \frac{81 - 3}{3} = \frac{78}{3} = 26$$

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Si reducimos la amplitud del intervalo $[a, a+h]$ al punto $x = a$ obtenemos la **DERIVADA DE LA FUNCIÓN EN EL PUNTO $\boldsymbol{x = a}$**.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Cuando el límite no existe decimos que la función no es derivable en ese punto.

Geométricamente la derivada de una función en un punto representa la **pendiente de la recta tangente** a la función en dicho punto.

(Geogebra)

Ejemplo: Calcula la derivada de la función $f(x) = x^2 + 2x$ en $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(1+h)^2 + 2 \cdot (1+h)] - [1^2 + 2 \cdot 1]}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+4) = 4$$

3. FUNCIÓN DERIVADA

Se llama **FUNCIÓN DERIVADA**, $f'(x)$, a la función que asocia a cada x la derivada en ese valor:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo: Calcula la función derivada de $f(x) = 3x^2 - 7x + 13$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 7(x+h) + 13] - [3x^2 - 7x + 13]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 7x - 7h + 13 - 3x^2 + 7x - 13}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 7h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(6x + 3h - 7)}{h} = \lim_{h\to 0} 6x + 3h - 7 = 6x - 7$$

S2. Ejercicios: pág. 278, ej.1; pág. 279, ej. 3; pág. 280, ej. 6, 7.

4. REGLAS DE DERIVACIÓN

Aplicando la definición de derivada podemos obtener un catálogo de derivadas de funciones elementales para no tener que estar continuamente calculando límites, estas son las **REGLAS DE DERIVACIÓN**.

a. $f(x) = k \to f'(x) = 0$

b. $f(x) = x \to f'(x) = 1$

c. $f(x) = x^n \to f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

d. $f(x) = k \cdot u(x) \to f'(x) = k \cdot u'(x)$

e. $f(x) = u(x) + v(x) \to f'(x) = u'(x) + v'(x)$

f. $f(x) = [u(x)]^n \to f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} u'(x)$

g. $f(x) = u(x) \cdot v(x) \to f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

h. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \to f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{u^2(x)}$

Ejemplos:

a. $f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = 0$

b. $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

c. $f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 1 = 3$

d. $f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^3$

e. $f(x) = 7x^2 \rightarrow f'(x) = 7 \cdot 2 \cdot x = 14x$

f. $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x + 1 \rightarrow f'(x) = 9x^2 - 10x + 7$

g. $f(x) = (3x^2 + 2x - 3)^3 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot (3x^2 + 2x - 3)^2 \cdot (6x + 2)$

h. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{1}{3} - 1} \cdot (2x)$

i. $f(x) = (3x - 5) \cdot \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = 3\sqrt[3]{x} + (3x - 5) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

j. $f(x) = \frac{3x+1}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 2x \cdot (3x+1)}{x^4} = \frac{3x^2 - 6x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-3x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-3x-2}{x^3}$

S2. Ejercicios: pág. 284, ej. 10 a, b, c, d, 11; pág. 285, ej. 13, 16a; pág. 300, ej. 39, 41 a-e,42.

i. $f(x) = sen\ (u(x)) \rightarrow f'(x) = \cos\big(u(x)\big) \cdot u'(x)$

j. $f(x) = \cos\big(u(x)\big) \rightarrow f'(x) = -sen\big(u(x)\big) \cdot u'(x)$

k. $f(x) = tg\big(u(x)\big) \rightarrow f'(x) = \big[1 + tg^2\big(u(x)\big)\big] \cdot u'(x)$

l. $f(x) = arc\ sen\ (u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{u\prime(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$

m. $f(x) = \text{arc}\cos\big(u(x)\big) \rightarrow f'(x) = \frac{-u\prime(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$

n. $f(x) = arc\ tg\big(u(x)\big) \rightarrow f'(x) = \frac{u\prime(x)}{1 + u^2(x)}$

o. $f(x) = e^{u(x)} \rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

p. $f(x) = a^{u(x)} \rightarrow f'(x) = a^{u(x)} \cdot lna \cdot u'(x)$

q. $f(x) = \ln\ (u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{u\prime(x)}{u(x)}$

r. $f(x) = log_a(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{u\prime(x)}{u(x) \cdot lna}$

Ejemplos:

a. $f(x) = sen(x^2+5x-1) \rightarrow f'(x) = \cos(x^2+5x-1) \cdot (2x+5)$

b. $f(x) = cos\sqrt{x^2+5x-1} \rightarrow f'(x) = -sen\sqrt{x^2+5x-1} \cdot \frac{-1\cdot(2x+5)}{2\sqrt{x^2+5x-1}}$

c. $f(x) = tg(x^3+1) \rightarrow f'(x) = [1+tg^2(x^3+1)] \cdot 3x^2$

d. $f(x) = sen^3(2x-1) \rightarrow f'(x) = 3 \cdot sen^2(2x-1) \cdot \cos(2x-1) \cdot 2$

$$= 6 \cdot sen^2(2x-1) \cdot \cos(2x-1)$$

e. $f(x) = arc\cos\sqrt{2x+3} \rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2x+3}\right)^2}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2x+3}}}{\sqrt{2x-2}} = \frac{-1}{\sqrt{2x-2}\cdot\sqrt{2x+3}} =$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4x^2+2x-6}}$$

f. $f(x) = arc\ sen\ x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

g. $f(x) = arc\ tg\ \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2+1}$

h. $f(x) = e^{x^2+3x} \rightarrow f'(x) = e^{x^2+3x} \cdot (2x+3)$

i. $f(x) = 3^{\sqrt{x}} \rightarrow f'(x) = 3^{\sqrt{x}} \cdot ln3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

j. $f(x) = \ln(x^3-5x^2) \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2-5x}{x^3-5x^2}$

k. $f(x) = log_3(8x^5) \rightarrow f'(x) = \frac{40x^4}{8x^5\cdot ln3}$

S3. Ejercicios: pág. 284, ej. 10 e-j; pág. 285, ej. 14, 15, 16; pág. 286, ej. 17, 18, 19.

S4. Ejercicios: pág. 300, ej. 43; pág. 301, ej. 42, 44, 45, 46, 47.

5. APLICACIONES DE LA DERIVADA

La derivada de una función nos permite estudiar el **CRECIMIENTO** y los **MÁXIMOS** y **MÍNIMOS** de una función.

(*Geogebra)*

- Si $f'(x_0) > 0 \rightarrow$ la función es **CRECIENTE**.
- Si $f'(x_0) < 0 \rightarrow$ la función es DE**CRECIENTE**.
- Si $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ Hay un **MÁXIMO** o **MÍNIMO RELATIVO**.

Ejemplo: Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos máximos y mínimos.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

1º Derivamos la función.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{3x^4 - 9x^2 - 2x^4}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2}$$

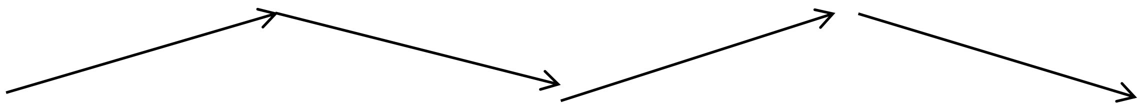
2º Igualamos a cero la derivada y resolvemos la ecuación.

$$\frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2} = 0 \to x^4 - 9x^2 = 0 \to x^2 \cdot (x^2 - 9) = 0$$

$$\to \begin{cases} x^2 = 0 \to x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \to x^2 = 9 \to x = \pm 3 \end{cases}$$

3º Estudiamos el crecimiento en los diferentes intervalos sustituyendo valores en la derivada.

$-\infty$ -3			$+\infty$
$+$	$-$	$-$	$+$



$$f'(-4) = \frac{(-4)^4 - 9 \cdot (-4)^2}{((-4)^2 - 3)^2} = + \qquad f'(-4) = \frac{(\text{`} + 1)^4 - 9 \cdot (+1)^2}{((+1)^2 - 3)^2} = -$$

$$f'(-1) = \frac{(-1)^4 - 9 \cdot (-1)^2}{((-1)^2 - 3)^2} = - \qquad f'(-4) = \frac{(+4)^4 - 9 \cdot (+4)^2}{((+4)^2 - 3)^2} = +$$

La función crece en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(-3, 0) \cup (0,3)$

4º Observamos los máximos y mínimos.

Tenemos un máximo en $x = -3$ → Calculamos la segunda coordenada sustituyendo $x = -3$ en la función original.

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{(-3)^2 - 3} = -\frac{9}{2} \to Máximo \ \left(-3, -\frac{9}{2}\right)$$

Tenemos un mínimo en $x = +3$ → Calculamos la segunda coordenada sustituyendo $x = +3$ en la función original.

$$f(-3)=\frac{(+3)^3}{(+3)^2-3}=\frac{9}{2}\rightarrow Mínimo\ \left(+3,+\frac{9}{2}\right)$$

S5. Ejercicios: pág. 289, 22, 23.

6. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Para representar una función obtendremos:

1º Dominio.

Casos especiales: funcionales racionales, radicales y logarítmicas.

2º Cortes con los ejes.

Eje Y → $x=0$ →Sustituimos la x por 0.

Eje X → $y=0$ →Igualamos la función a 0 y resolvemos.

3º Simetría.

$f(-x)=f(x)$ →Función par

$f(-x)=-f(x)$ →Función impar

4º Asíntotas.

Asíntota Vertical. Valor concreto fuera del dominio. Calculamos los límites laterales para estudiar la posición.

Asíntota Horizontal. $y=\lim_{x\to\infty} f(x)$

Asíntota Oblicua. $y=mx+n \rightarrow \begin{cases} \mathrm{m}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\neq 0 \\ n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) \end{cases}$

5º Monotonía. Derivamos y estudiamos el signo de la derivada en los intervalos.

6º Extremos. Igualamos la derivada a cero y obtenemos los máximos y mínimos.

7º Representación.

3.1 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS

Ejemplo: Representa la siguiente función polinómica

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

a) Dominio. $Domf = \mathbb{R}$

b) Cortes con los ejes.

Corte con el eje OY:

$$x = 0 \rightarrow y = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 \rightarrow (0,4)$$

Corte con el eje OX:

$$y = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = 2, x = -1 \rightarrow (2,0), (-1,0)$$

c) Simetría

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4 \rightarrow \text{No es simétrica}$$

d) Asíntotas.

Asíntota vertical. No existe ya que $Domf = \mathbb{R}$.

Asíntota horizontal.

$\lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 4 = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x^2 + 4 = -\infty$

No existe asíntota horizontal.

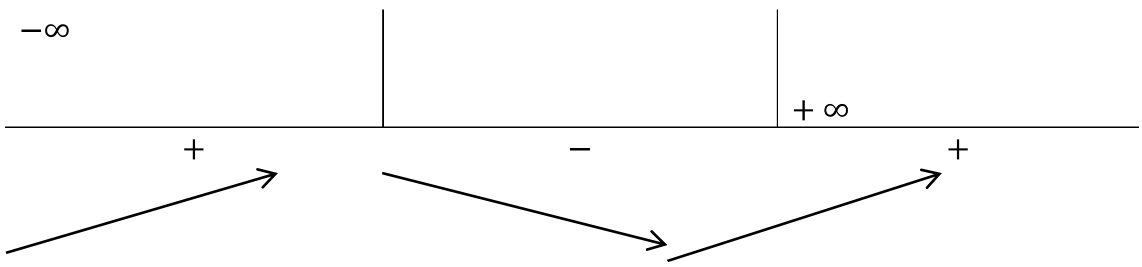
Asíntota oblicua.

$\mathrm{m} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+4}{x} = \infty \rightarrow$No existe asíntota oblicua.

e) Crecimiento y máximos y mínimos.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \rightarrow \ 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(3x - 6) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 6 = 0 \rightarrow 3x = 6 \ \rightarrow x = 2 \end{cases}$$



$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = +$$

$$f'(+1) = 3(+1)^2 - 6(+1) = -$$

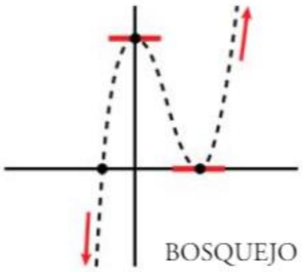
$$f'(+3) = 3(+3)^2 - 6(+3) = +$$

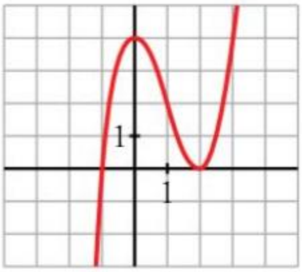
La función crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 2)$

Hay un máximo en $x = 0 \rightarrow f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 \rightarrow (0, 4)$

Hay un mínimo en $x = 2 \rightarrow f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0 \rightarrow (2, 0)$

f) Representación:





S6. Ejercicios: pág. 293, ej. 26; pág. 302, ej. 66.

3.2 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

<u>Ejemplo</u>: Representa la siguiente función polinómica

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$$

a) Dominio.

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow Domf = \mathbb{R} - \{-1\}$$

b) Cortes con los ejes.

Corte con el eje OY:

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{0^2 - 3 \cdot 0}{0 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Corte con el eje OX:

$$y = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 3x}{x + 1} = 0 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0) \end{cases}$$

c) Simetría.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3(-x)}{-x+1} = \frac{x^2+3x}{-x+1} \rightarrow \text{No es simétrica.}$$

d) Asíntotas.

Posible asíntota vertical en $x = -1 \rightarrow$ Estudiamos continuidad

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)}{-1+1} = \frac{4}{0} \rightarrow Discontinua\ de\ salto\ infinito$$

$$AV: x = -1 \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \dfrac{(-1{,}1)^2 - 3 \cdot (-1{,}1)}{-1{,}1+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \dfrac{(-0{,}9)^2 - 3 \cdot (-0{,}9)}{-0{,}9+1} = +\infty \end{cases}$$

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x+1} = +\infty \ \rightarrow \nexists$$

Asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 + x} = 1 \ \rightarrow m = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x+1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x - x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x - x^2 - x}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-4x}{x+1} = -4$$

$$y = x - 4 \rightarrow$$

$$f(x) - y = \frac{x^2 - 3x}{x+1} - (x-4) = \frac{x^2 - 3x - (x-4) \cdot (x+1)}{x+1}$$

$$= \frac{x^2 - 3x - x^2 - x + 4x + 4}{x+1} = \frac{4}{x+1}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{4}{-1000+1} = 0^- \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{4}{1000+1} = 0^+ \end{cases}$$

e) Crecimiento y máximos y mínimos.

$$f'(x) = \frac{(2x-3) \cdot (x+1) - (x^2 - 3x) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - 3x - 3 - x^2 + 3x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = 0 \ \rightarrow \ x^2 + 2x - 3 = 0 \ \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$-\infty \quad -3$	-1	1	$+\infty$
(-4)	(-2)	(0)	$(+2)$
$+$	$-$	$-$	$+$
↗	↘	↘	↗

$$f'(-4) = \frac{(-4)^2 + 2\cdot(-4) - 3}{(-4+1)^2} = +$$

$$f'(-2) = \frac{(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 3}{(-2+1)^2} = -$$

$$f'(0) = \frac{(0)^2 + 2\cdot(0) - 3}{(0+1)^2} = -$$

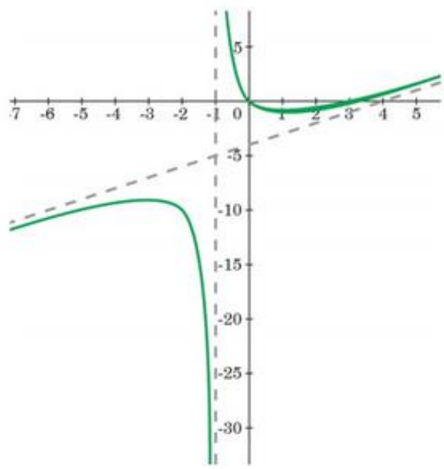
$$f'(+2) = \frac{(+2)^2 + 2\cdot(+2) - 3}{(2+1)^2} = +$$

La función crece en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-4, -1) \cup (-1, 1)$

Hay un máximo en $x = -3 \rightarrow f(-3) = \frac{(-3)^2 - 3\cdot(-3)}{-3+1} = 9 \rightarrow (-3, 9)$

Hay un mínimo en $x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{1^2 - 3\cdot 1}{1+1} = -1 \rightarrow (1, -1)$

f) Representación:



S7. Ejercicios: pág. 293, ej. 27; pág. 302, ej. 67, (68).

7. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1º Representamos geométricamente el problema.

2º Expresamos la función que queremos optimizar.

3º Expresamos en forma de ecuación la relación entre ambas variables.

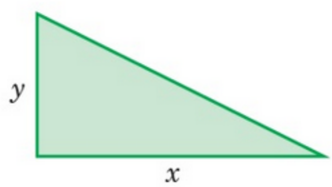
4º Despejamos una de las variables en función de la otra y sustituimos en la función.

5º Derivamos la función e igualamos a cero para obtener los puntos extremos.

6º Confirmamos que se cumplen las condiciones del problema.

Ejemplo: Encuentra las dimensiones del triángulo rectángulo de área máxima del que sabemos que la suma de los catetos es 12 cm.

1º Representamos el problema.



2º Obtenemos la función del área del triángulo (función a optimizar).

$$f(x,y)=\frac{x\cdot y}{2}$$

3º Expresamos la relación entre ambas variables:

$$x+y=12$$

4º Despejamos una de las variables en función de la otra y sustituimos en la función.

$$x+y=12\rightarrow y=12-x\rightarrow f(x)=\frac{x\cdot(12-x)}{2}=\frac{12x-x^2}{2}=6x-\frac{x^2}{2}$$

5º Derivamos la función e igualamos a cero para obtener los puntos extremos.

$$f'(x)=6-\frac{2x\cdot 2-x^2\cdot 0}{4}=6-\frac{4x}{4}=6-\mathrm{x}$$

$$6-x=0\rightarrow x=6$$

6º Estudiamos el signo de los intervalos:

0 (+1) 6	
$+$	$-$
$\nearrow$	$\searrow$

Por tanto, en $x=6$ hay un máximo.

$$y=12-x\rightarrow y=12-6\rightarrow$$

Por tanto, el triángulo será un triángulo isósceles de 6 cm cada cateto.

S8. Ejercicios: pág. 290, ej. 24, 25; pág. 302, ej. 63, 65.

S9-10. Problemas de Optimización. Ficha de ejercicios

S11-12. Repaso.

S12. Ejercicios: Pre-Examen 8. Derivadas.