TEMA 9. FUNCIONES

1. FUNCIONES. DOMINIO Y RECORRIDO

Una **FUNCIÓN**, f, es una relación entre dos conjuntos que asocia a cada elemento del conjunto inicial un único elemento del conjunto final.

$$f: A \rightarrow B$$
$$a \rightarrow f(a) = b$$

Una función puede expresarse mediante una **TABLA**, una **GRÁFICA** o una **EXPRESIÓN ANALÍTICA** (fórmula).

1.1 RECORRIDO

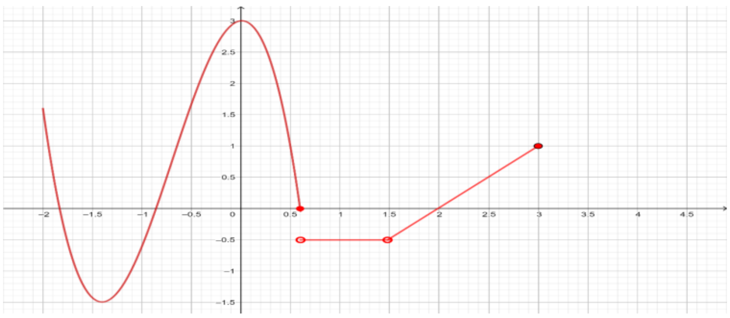
El **RECORRIDO** o **IMAGEN,** Imf, de una función es el conjunto de todos los valores de $y = f(x)$ que toma.

1.2 DOMINIO

El **DOMINO** de una función, $Domf$, es el conjunto de valores de x para los que está definida la función**.**

GRAFICAMENTE:

Ejemplo: Calcula el domino y recorrido de la función.



$$Domf = [-2, 0'5] \cup (0'5, 1'5) \cup (1'5, 3], \quad Recorregut\ f = [-1'5, 3]$$

ANALÍTICAMENTE

El domino de una función es tan amplio como permita su expresión analítica.

CASOS ESPECIALES:

1. Funciones racionales.

Una fracción algebraica no existe si el denominador es cero.

Clara Benedicto Baldonado

Ejemplo: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x}$

1º Igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(x-5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \end{cases}$$

2º El domino serán todos los valores reales menos las soluciones de la ecuación.

$$Domf = \mathbb{R} - \{0, 5\}$$

2. Funciones irracionales

Una raíz de índice par no existe si el número de dentro es negativo.

Ejemplo 1: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

1º Igualamos el radicando a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

$-\infty$ $\quad -1$	5	$+\infty$
$(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 5 = 7$	$0^2 - 4 \cdot 0 - 5 = -5$	$6^2 - 4 \cdot 6 - 5 = 7$
$+$	$-$	$+$

3º El domino serán los intervalos donde los valores sean positivos.

$$Domf = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$$

S1. Ejercicios: pág. 219, ej. 1, 2, 3; pág. 238, ej. 41, 42.

Ejemplo 2: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2x-5}}$

1º Hallamos los valores que anulan al numerador y al denominador.

$$x + 3 = 0 \to x = -3$$

$$2x - 5 = 0 \to 2x = 5 \to x = \frac{5}{2}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

	$-\infty \qquad -3$	$-3 \qquad \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} \qquad +\infty$
$x+3$	$-4+3=-1 \to -$	$0+3=+3 \to +$	$3+3=+6 \to +$
$2x-5$	$2\cdot(-4)-5=-13 \to -$	$2\cdot 0-5=-5 \to -$	$2\cdot 6-5=+1 \to +$
$\frac{x+3}{2x-5}$	$\frac{-}{-}=+$	$\frac{+}{-}=-$	$\frac{+}{+}=+$

3º El domino serán los intervalos donde los valores sean positivos, sin incluir el valor que anula al denominador.

$$Domf = (-\infty, -3] \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

3. Funciones logarítmicas

No existe el logaritmo de un número negativo ni el de cero.

Ejemplo: Halla el dominio de definición de la función: $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

1º Igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 3x = 0 \to x(x-3) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \to x = 3 \end{cases}$$

2º Estudiamos el signo en los intervalos:

$-\infty \qquad 0$	3	$+\infty$
$(-1)^2 - 3\cdot(-1) = 4$	$1^2 - 3\cdot 1 = -2$	$4^2 - 3\cdot 4 = 4$
$+$	$-$	$+$

3º El domino serán los intervalos donde los valores sean positivos, sin incluir los extremos donde se anula.

$$Domf = (-\infty, 0) \cup (3+\infty)$$

S2. Ejercicios: pág. 238, ej. 43, 44.

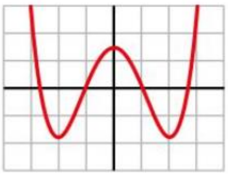
2. SIMETRÍA Y PERIODICIDAD

2.1 SIMETRÍA

- Una función presenta una **SIMETRÍA PAR** o simetría respecto al eje de ordenadas si $f(-x) = f(x)$.
- Una función presenta una **SIMETRÍA IMPAR** o simetría respecto al origen de coordenadas si $f(-x) = -f(x)$.

Ejemplos: Estudia las simetrías de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{x^4-8x^2+7}{5}$



Calculamos $f(-x)$:

$f(-x) = \frac{(-x)^4-8(-x)^2+7}{5} = \frac{x^4-8x^2+7}{5} = f(x) \rightarrow Simetría\ Par$

b. $f(x) = x^3 - 3x$

Calculamos $f(-x)$:

$f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \rightarrow Simetría\ Impar$

c. $f(x) = x^5 + 2x^3 - 1$

Calculamos $f(-x)$:

$f(-x) = (-x)^5 + 2(-x)^3 - 1 = -x^5 - 2x^3 - 1 \rightarrow No\ presenta\ simetría$

2.2 PERIODICIDAD

Una función es **PERIÓDICA** de periodo T si su gráfica se repite a intervalos de longitud T.

Ejemplo: Sabiendo que f es una función periódica de periodo 4, de la que conocemos los valores: $f(0) = 3, f(1) = 5, f(2) = 0, f(3) = 1$. Calcula:

a. $f(17) = f(1) = 5$

b. $f(38) = f(2) = 0$

c. $f(12) = f(0) = 3$

S3. Ejercicios: pág. 220, ej. 4, 5; pág. 238, ej. 45, 47.

Clara Benedicto Baldonado

3. FUNCIONES LINEALES

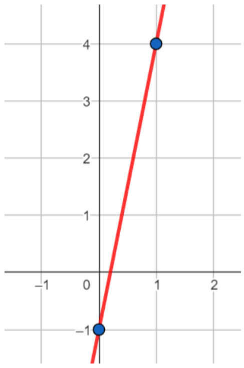
Las **FUNCIONES LINEALES** se describen con ecuaciones de primer grado $y = mx + n$ (m pendiente y n ordenada en el origen) y se representan mediante **RECTAS**.

3.1. REPRESENTACIÓN

Para representar una función lineal damos dos valores cualesquiera a la x y sustituimos en la ecuación para calcular sus coordenadas y correspondientes.

Ejemplo: Representa $y = 5x - 1$

x	y
0	$y = 5 \cdot 0 - 1 = -1$
1	$y = 5 \cdot 1 - 1 = 4$



3.2 ECUACIÓN

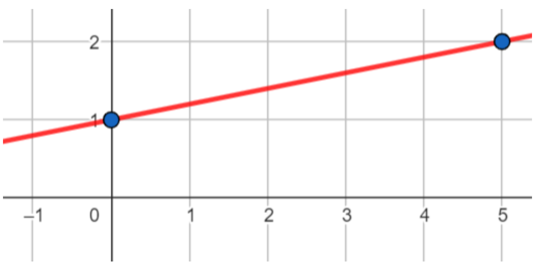
Si conocemos dos puntos de la recta, $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ la pendiente de la recta será:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y por tanto su ecuación:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

Ejemplo: Escribe la ecuación de la recta:



1º Identificamos dos puntos: $A(0,1), B(5,2)$

2º Calculamos la pendiente:

$$m = \frac{2-1}{5-0} = \frac{1}{5}$$

3º Sustituimos en la ecuación.

$$y = \frac{1}{5} \cdot (\mathrm{x} - 0) + 1$$

$$y = \frac{1}{5}\mathrm{x} + 1$$

S4. Ejercicios: pág. 221, ej. 9; pág. 238, ej. 48, 50 a, b.

4. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Las **FUNCIONES CUADRÁTICAS** se describen con ecuaciones de segundo grado

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

Y se representan mediante **PARÁBOLAS**.

4.1 REPRESENTACIÓN

Ejemplo: Representa la siguiente parábola $f(x) = x^2 - 3x - 4$

1º Obtenemos el vértice de la parábola:

Coordenada x: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2 \cdot 1} = 1.5$

Coordenada y: $y_v = 1.5^2 - 3 \cdot 1.5 - 4 = -6.25$

Vértice: $(1.5, -6.25)$

2º Obtenemos los puntos de corte:

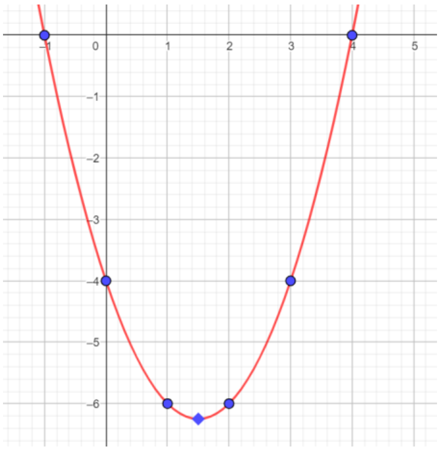
Corte con el eje OY: $x = 0 \rightarrow y = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4 \rightarrow (0, -4)$

Corte con el eje OX: $y = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} =$
$\begin{cases} x = 4 \rightarrow (4, 0) \\ x = -1 \rightarrow (-1, 0) \end{cases}$

3º Sustituimos en dos valores a cada lado del vértice:

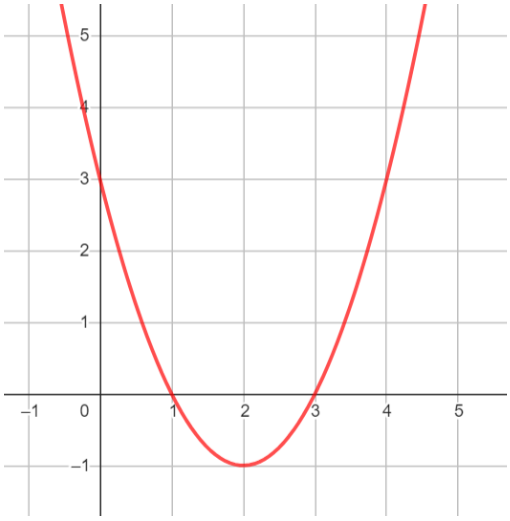
x	$f(x)$
0	$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4 \rightarrow (0, -4)$
1	$f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 - 4 = -6 \rightarrow (1, -6)$
1.5	-6.25
2	$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 - 4 = -6 \rightarrow (2, -6)$
3	$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 - 4 = -4 \rightarrow (3, -4)$

4º Representamos todos los puntos y unimos:



4.2 ECUACIÓN

<u>Ejemplo:</u> Halla la ecuación de la siguiente función:



Tenemos una parábola de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Como corta al eje OY en el punto $(0, 3)$:

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3 \rightarrow c = 3$$

Además, el vértice es $(2, -1)$:

$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 3 = -1 \rightarrow 4a + 2b = -4$$

$$\frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow -b = 4a \rightarrow b = -4a$$

Sustituyendo:

$$4a + 2 \cdot (-4a) = -4 \rightarrow 4a - 8a = -4$$
$$\rightarrow -4a = -4 \rightarrow a = 1$$

$$b = -4 \cdot 1 = -4$$

La ecuación es: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

S5. Ejercicios: pág. 221, ej.7, 8, 10; pág. 238, ej 50 c, d, e, f, 51.

5. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Se llaman **FUNCIONES DE PROPOCIONALIDAD INVERSA** a aquellas cuya ecuación es:

$$f(x) = \frac{k}{x+a}$$

Sus gráficas son **HIPERBOLAS**, que tienen una asíntota vertical en $x = -a$ y su domino es $Domf = \mathbb{R} - \{a\}$.

Ejemplo: Representa la función

$$f(x) = \frac{2}{x-3}$$

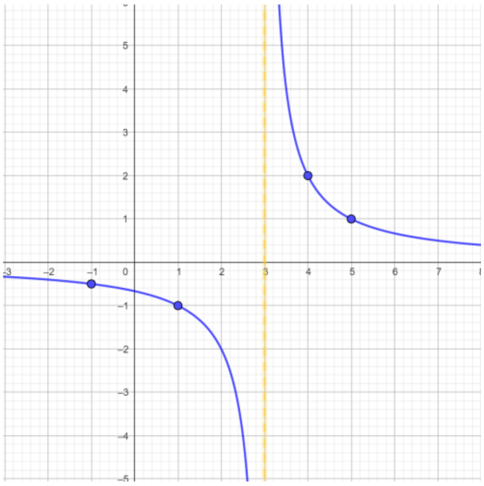
1º Obtenemos la asíntota vertical igualando el denominador a cero.

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow Domf = \mathbb{R} - \{3\}$$

2º Tomamos valores a ambos lados de la asíntota.

x	$f(x)$
-1	$f(-1) = \frac{2}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -0.5 \rightarrow (0, -0.5)$
1	$f(1) = \frac{2}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1 \rightarrow (1, -1)$
3	Asíntota
4	$f(4) = \frac{2}{4-3} = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow (4, 2)$
5	$f(5) = \frac{2}{5-3} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow (5, 1)$

3º Representamos:



6. FUNCIONES IRRACIONALES

Se llaman **FUNCIONES IRRACIONALES** a aquellas cuya ecuación es:

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

Sus gráficas son **MEDIAS PARÁBOLAS** con el eje de simetría paralelo al eje X y su domino es

Ejemplo: Representa la función

$$y = \sqrt{x-2}$$

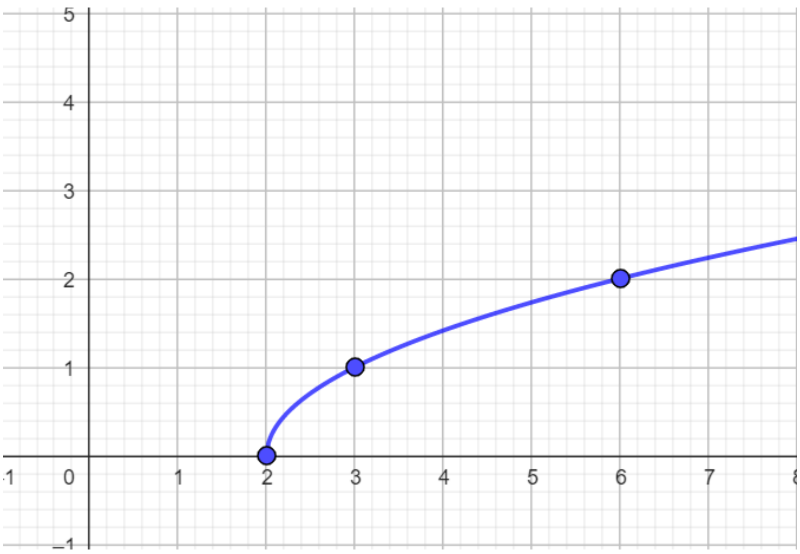
1º Obtenemos el domino igualando el radicando a cero.

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow Domf\ = [`2, +\infty)$$

2º Tomamos valores del dominio de la función.

x	y
2	0
3	$y = \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1 \rightarrow (3, 1)$
6	$y = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow (6, 2)$

3º Representamos:



S6. Ejercicios: pág. 222, ej. 12; pág. 223, ej. 14; pág. 239, ej. 52, 54.

Clara Benedicto Baldonado

7. FUNCIONES EXPONENCIALES

Se llaman **FUNCIONES EXPONENCIALES** las que tienen por ecuación $f(x) = a^x$, siendo la base a un número positivo distinto de 1.

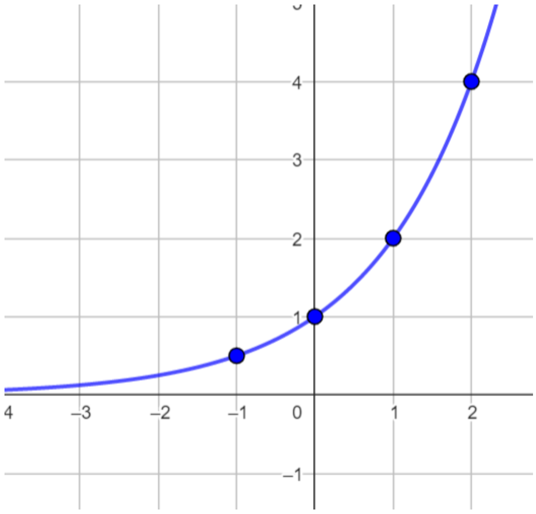
- Son funciones continuas que pasa por $(0, 1)$ y $(1, a)$
- Si $a > 1$ son crecientes, y su crecimiento es muy rápido. Si $0 < a < 1$ son decrecientes.

Ejemplo: Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2^x$

Tomamos valores y representamos

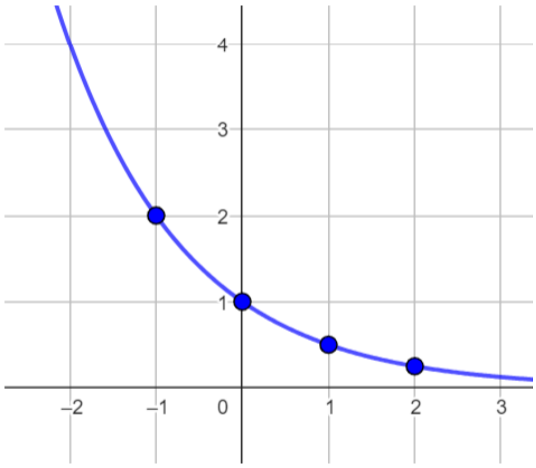
x	$f(x)$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = 0.5 \rightarrow (0, 0.5)$
0	$f(0) = 2^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$
1	$f(1) = 2^1 = 2 \rightarrow (1, 2)$
2	$f(2) = 2^2 = 4 \rightarrow (2, 4)$



b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Tomamos valores y representamos

x	$f(x)$
-1	$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \rightarrow (-1, 2)$
0	$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$
1	$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \rightarrow \left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \left(2, \frac{1}{4}\right)$



8. FUNCIONES LOGARÍTMICASa

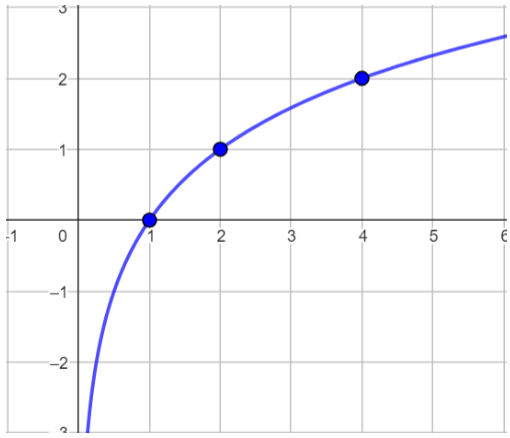
Se llaman **FUNCIONES LOGARÍTMICAS** las que tienen la ecuación $y = log_a x$, siendo $a > 0\ y\ a \neq 1$.

- Son funciones continuas en $(0, +\infty)$ y pasan por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$.
- Si $a > 1$ son crecientes. Si $0 < a < 1$ son decrecientes.
- La función $y = log_a x$ es la función inversa de $y = a^x$ y son simétricas,

Ejemplo 1: Representa la siguiente función $f(x) = log_2 x$

Tomamos valores y representamos

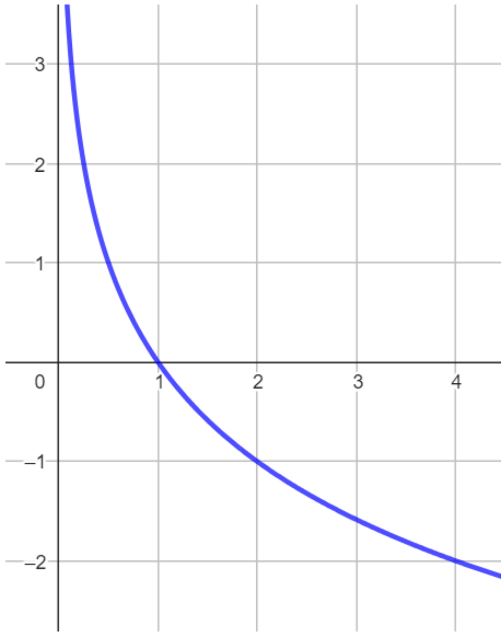
x	$f(x)$
1	$f(1) = log_2 1 = 0 \rightarrow (1, 0)$
2	$f(2) = log_2 2 = 1 \rightarrow (2, 1)$
4	$f(4) = log_2 4 = 2 \rightarrow (4, 2)$



Ejemplo 2: Representa la siguiente función $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$

Tomamos valores y representamos

x	$f(x)$
1	$f(1) = log_{\frac{1}{2}} 1 = 0 \rightarrow (1, 0)$
2	$f(2) = log_{\frac{1}{2}} 2 = -1 \rightarrow (2, -1)$
4	$y = log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \rightarrow (4, -2)$



S7. Ejercicios: pág.224, ej. 17; pág. 239, ej. 56, 58.

9. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Ejemplo: Representa esta función:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ 0 < x < 4 \\ x - 3 & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

1º Delimitamos los diferentes trozos con rectas verticales discontinuas.

2º Representamos cada tramo:

TRAMO 1: $y = x^2 + 2x + 1$ → Parábola (Función cuadrática)

- Calculamos el vértice.

Coordenada x: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$

Coordenada y: $y_v = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0$

Vértice: $(-1, 0)$

- Sustituimos en puntos a ambos lados del vértice dentro del intervalo.

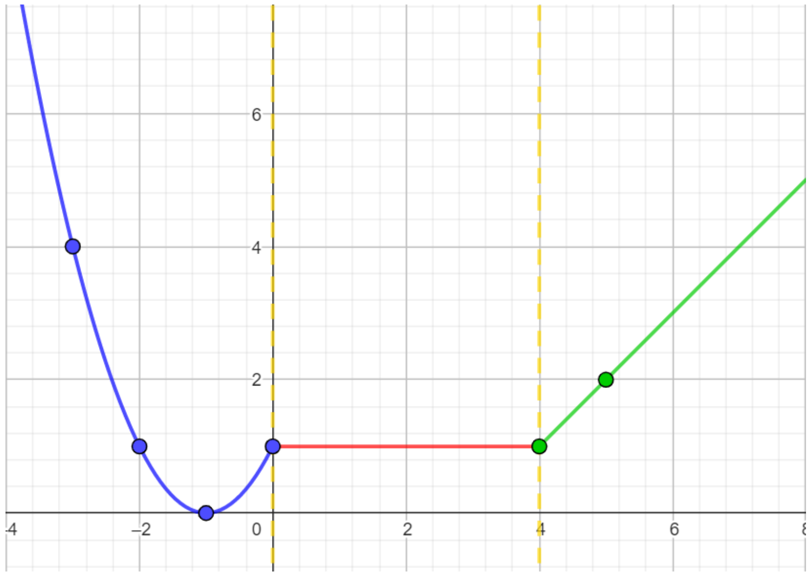
x	y
0	$y = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \rightarrow (0, 1)$
-1	0
-2	$y = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 1 = 1 \rightarrow (-2, 1)$
-3	$y = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 1 = 4 \rightarrow (-3, 4)$

TRAMO 2: $y = 1$ → Recta horizontal (Función constante)

TRAMO 3: $y = x - 3$ → Recta (Función lineal)

Damos dos valores cualesquiera dentro del intervalo a la x y sustituimos en la ecuación para calcular sus coordenadas y correspondientes.

x	y
4	$y = 4 - 3 = 1$
5	$y = 5 - 3 = 2$



S8. Ejercicios: pág. 227, ej. 24; pág. 239, ej. 60. (Extra: pág. 240, ej. 63)

10. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La **FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO** es una función a trozos tal que

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & si\ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & si\ f(x) < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1: Representa la función $y = |2x - 4|$

1º Igualamos a cero y resolvemos la ecuación para determinar los intervalos.

$$2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

2º Estudiamos el signo.

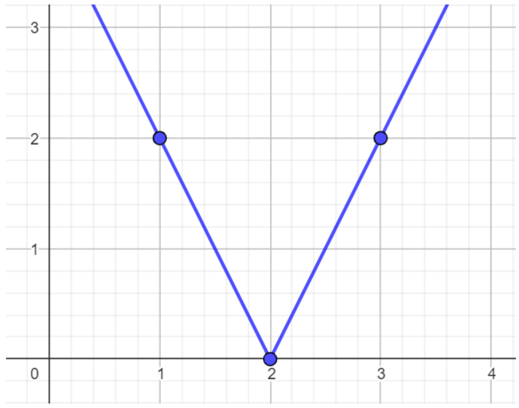
$-\infty$ 2	$+\infty$
$2 \cdot 0 - 4 = -4$	$2 \cdot 3 - 4 = +2$

3º Definimos la función a trozos.

$$y = |2x - 4| = \begin{cases} -2x + 4 & si\ x < 2 \\ 2x - 4 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

4º Damos valores y representamos:

x	y
1	$y = -2 \cdot 1 + 4 = 2$
2	0
3	$y = 2 \cdot 3 - 4 = 2$



<u>Ejemplo 2:</u> Representa la función $y = |x^2 - 3x - 4|$

1º Igualamos a cero y resolvemos la ecuación para determinar los intervalos.

$$x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

2º Estudiamos el signo.

$-\infty$ $\quad -1$	$+4$	$+\infty$
$(-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 4 = +6$	$0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4$	$5^2 - 3 \cdot 5 - 4 = +6$

3º Definimos la función a trozos.

$$y = |x^2 - 3x - 4| = \begin{cases} x^2 - 3x - 4 & si\ x \leq -1 \\ -x^2 + 3x + 4 & si - 1 < x < 4 \\ x^2 - 3x - 4 & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

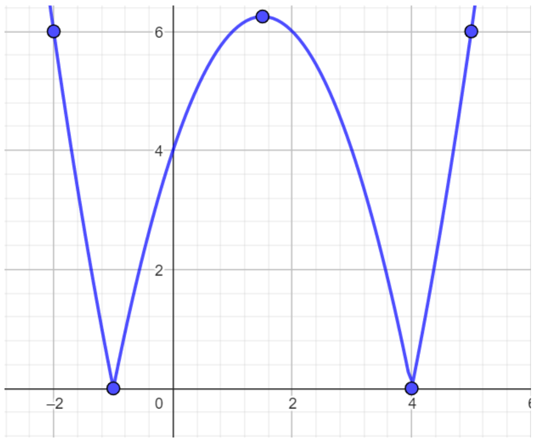
4º Obtenemos el vértice de la parte central, damos un valor en cada uno de los tramos laterales y representamos:

Coordenada x: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{+3}{2 \cdot 1} = 1.5$

Coordenada y: $y_v = -(1.5)^2 + 3 \cdot (1.5) + 4 = 6.25$

Vértice: $(1.5, 6.25)$

x	y
-2	$y = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 4 = 6 \rightarrow (-2,6)$
-1	0
4	0
5	$y = 5^2 - 3 \cdot 5 - 4 = 6 \rightarrow (5,6)$



S9. Ejercicios: pág. 228, ej. 27; pág. 239, ej. 61.

11. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones, f y g se llama **FUNCIÓN COMPOSICIÓN** de, f y g y se designa $g\ o\ f$ a la función que transforma x en $g[f(x)]$

$$g\ o\ f: x \rightarrow f(x) \rightarrow g[f(x)]$$

Ejemplo: Considera las funciones

$$f(x) = x^2 - x, \qquad g(x) = \frac{4}{x+1}$$

Obtén la expresión analítica de $g\ o\ f$ y $f\ o\ g$

$$g\ o\ f = g[f(x)] = g[x^2 - x] = \frac{4}{x^2 - x + 1}$$

$$f\ o\ g = f[g(x)] = f\left[\frac{4}{x+1}\right] = \left(\frac{4}{x+1}\right)^2 - \frac{4}{x+1} = \frac{16}{(x+1)^2} - \frac{4}{x+1}$$

$$= \frac{16 - 4(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{16 - 4x - 4}{(x+1)^2} = \frac{12 - 4x}{(x+1)^2}$$

S10. Ejercicios: pág. 232, ej. 35; pág. 240, ej. 66, 68.

12. FUNCIÓN INVERSA

Se llama **FUNCIÓN INVERSA** de f a otra función f^{-1} que cumple que

$$f \text{ o } f^{-1} = f^{-1} o\, f = x$$

CÁLCULO DE LA FUNCIÓN INVERSA

Ejemplo: Halla la expresión analítica de la función inversa de $f(x) = 2x - 3$

1º Llamamos $f(x) = y \rightarrow y = 2x - 3$

2º Intercambiamos las incógnitas x y y.

$$x = 2y - 3$$

3º Despejamos y.

$$x = 2y - 3 \rightarrow 2y = x + 3 \rightarrow y = \frac{x+3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

Ejemplo: Comprueba que $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ es la inversa de $f(x) = 2x - 3$

$$f^{-1} o\, f = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}[2x - 3] = \frac{2x - 3 + 3}{2} = x$$

S11. Ejercicios: pág. 233, ej. 37, 38; pág. 240, ej. 70.

S12. Ejercicios: Repaso Funciones.

S13. Ejercicios: Pre-Examen 6. Funciones