TEMA 8. NÚMEROS COMPLEJOS

1. LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1.1 DEFINICIONES

- **UNIDAD IMAGINARIA** se define como $i = \sqrt{-1}$
- Un **NÚMERO COMPLEJO** en forma binómica se expresa de la forma:

  $z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$

  a es la **PARTE REAL** o $Re\ z$ y b es la **PARTE IMAGINARIA** o $Im\ z$
- El **CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS** se representa como

  Si $b = 0 \rightarrow z = a \rightarrow z$ es una **NÚMERO REAL**

  Si $a = 0 \rightarrow z = bi \rightarrow z$ es una **NÚMERO IMAGINARIO PURO**
- El **OPUESTO** de $z = a + bi$ es $-z = -a - bi$
- El **CONJUGADO** de $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$

1.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

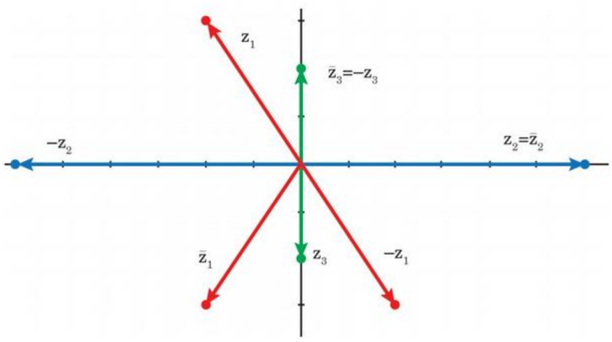
$z = a + bi$ se representa mediante un vector que nace en el origen de coordenadas y concluye en (a, b).

Ejemplo: Dados los números complejos: $z_1 = -2 + 3i, z_2 = 6$ y $z_3 = -2i$.

a) Represéntalos en el plano complejo.

b) Representa sus conjugados.

c) Representa sus opuestos.



1.3 APLICACIONES

Hasta ahora, en las ecuaciones que obtenían como solución una raíz negativa concluíamos que "no tiene solución real". Los números complejos amplían el conjunto de los reales para dar solución a las raíces negativas.

Ejemplo: Resuelve las ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}i = \pm 2i$

b) $x^2 - 2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16} i}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} \rightarrow$

$$x = \begin{cases} \dfrac{2+4i}{2} = 1 + 2i \\ \dfrac{2-4i}{2} = 1 - 2i \end{cases}$$

S1. Ejercicios: pág. 194, ej. 6, 7, 8; pág.208, ej. 38, 39, 40.

2. OPERACIONES EN FORMA BINÓMICA

2.1 SUMA

Se suman las partes reales por un lado y las imaginarias por otro.

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

Ejemplo: Calcula

$$(3+7i) + (2+i) = (3+2) + (7+1)i = 5 + 8i$$

2.2 DIFERENCIA

Se suma opuesto.

$$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

Ejemplo: Calcula

$$(5+7i) - (3+10i) = (5-3) + (7-10)i = 2 - 3i$$

2.3 PRODUCTO

Se multiplica todo por todo.

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplo: Calcula

$$\begin{aligned}(2-5i)\cdot(4+7i) &= 8 + 14i - 20i - 35i^2 = 8 + 14i - 20i - 35\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2 \\ &= 8 + 14i - 20i - 35\cdot(-1) = 8 + 14i - 20i + 35 = 43 - 6i\end{aligned}$$

2.4 COCIENTE

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2-(di)^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo: Calcula

$$\frac{3-7i}{4-3i}=\frac{(3-7i)\cdot(4+3i)}{(4-3i)\cdot(4+3i)}=\frac{12+9i-28i-21i^2}{4^2-(3i)^2}=\frac{12+9i-28i+21}{16+9}=$$

$$=\frac{33-19i}{25}=\frac{33}{25}-\frac{19}{25}i$$

S2. Ejercicios: pág. 195, ej. 9, 10; pág. 196, ej. 11, 12; pág. 208, ej. 41, .45 a, 46 a.

2.5 INVERSO

Dado $z=a+bi$ definimos su **INVERSO** como $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1\cdot(a-bi)}{(a+bi)\cdot(a-bi)}=\frac{a+bi}{a^2-(bi)^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$$

Ejemplo: Calcula el inverso de $z=2-3i$.

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2-3i}=\frac{1\cdot(2+3i)}{(2-3i)\cdot(2+3i)}=\frac{2+3i}{2^2-(3i)^2}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

2.6 POTENCIAS

Potencia de la unidad imaginaria:

$i^1=1$

$i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$

$i^3=i^2\cdot i=\left(\sqrt{-1}\right)^2\cdot i=-i,$

$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$

$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$

$i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$

$i^7=i^4\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i,$

$i^8=i^4\cdot i^4=1\cdot 1=1$

$i^9=i^5\cdot i^4=i\cdot 1=i$

…

Se repite cíclicamente $i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=\ -i, i^{4n}=\ 1.$

Ejemplo: Calcula

$$\frac{i^5+2i^3}{i^2-4i}=\frac{i+2(-i)}{-1-4i}=\frac{-i}{-1-4i}=\frac{-i\cdot(-1+4i)}{(-1-4i)\cdot(-1+4i)}=\frac{i-4i^2}{(-1)^2-(4i)^2}=\frac{i+4}{1+16}$$
$$=\frac{i+4}{17}=\frac{4}{17}+\frac{1}{17}i$$

Potencia de un número complejo: Aplicamos la fórmula del Binomio de Newton.

$$(a+bi)^n=\sum_{i}^{n}\binom{n}{i}\cdot a^{n-i}\cdot(bi)^i$$

Ejemplo: Calcula

$$(2+3i)^3=\binom{3}{0}\cdot 2^3\cdot(3i)^0+\binom{3}{1}\cdot 2^2\cdot(3i)^1+\binom{3}{2}\cdot 2^1\cdot(3i)^2+\binom{3}{3}\cdot 2^0\cdot(3i)^3$$
$$=1\cdot 8\cdot 1+3\cdot 4\cdot 3\cdot i+3\cdot 2\cdot 9\cdot(-1)+1\cdot 1\cdot 27\cdot(-i)$$
$$=8+36i-54-27i=-46+9i$$

S3. Ejercicios: pág. 196, ej. 13, 14, 16; pág. 208, ej. 42, 43, 45 b, 46 b.

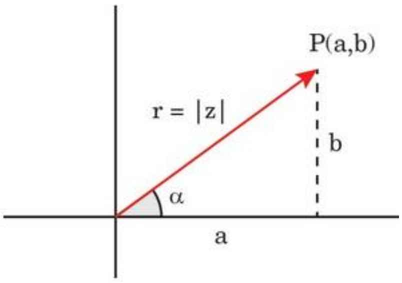
3. FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA

3.1 FORMA POLAR

Un **NÚMERO COMPLEJO** en forma polar se expresa de la forma:

$$z=r_\alpha$$

- $r=|z|$ es el **MÓDULO**, la longitud del vector que lo define.
- α es el **ARGUMENTO**, el ángulo que forma el vector con el eje de abscisas.



3.2 DE FORMA BINÓMICA A FORMA POLAR

Sea $z=a+bi$ su forma polar r_α se obtiene mediante:

$$r=\sqrt{a^2+b^2} \qquad tg\alpha=\frac{b}{a}$$

Nota: Al obtener el ángulo existen dos soluciones $tg\alpha=tg(180+\alpha)$, para saber que solución es la correcta será necesario representar el número.

Ejemplo: Expresa en forma polar $z = -1 + i$

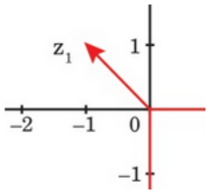
1º Calculamos r.

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

2º Calculamos α.

$$tg\alpha = \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow \alpha = arc\ tg(-1) = -45 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 360 - 45 = 315° \\ \alpha = 180 + (-45) = 135° \end{cases}$$

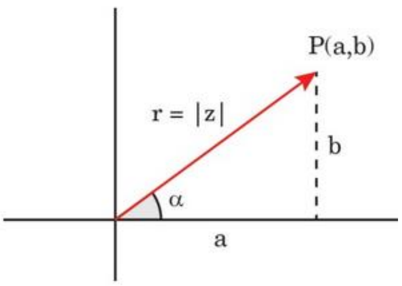
3º Representamos el número complejo en forma binómica para escoger entre las dos soluciones de α.



$$z = \sqrt{2}_{135°}$$

3.3 DE FORMA POLAR A FORMA BINÓMICA

Sea $z = r_\alpha$ por trigonometría tenemos:



$$\left.\begin{array}{l} cos\alpha = \dfrac{a}{r} \rightarrow a = r \cdot cos\alpha \\ sen\alpha = \dfrac{b}{r} \rightarrow b = r \cdot sen\alpha \end{array}\right\} \rightarrow z = rcos\alpha + rsen\alpha\ i$$

Si sacamos factor común r obtenemos la **FORMA TRIGONOMÉTRICA**

$$z = r \cdot (cos\alpha + isen\alpha\ )$$

Ejemplo: Expresa el número complejo $z = 2_{30°}$ en forma binómica.

$$z = 2_{30°} = 2cos30 + 2sen30\ i = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} i = \sqrt{3} + i$$

S4. Ejercicios: pág. 197, ej. 17; pág. 198, ej. 20; pág. 208, ej. 47, 48, 50.

4. OPERACIONES EN FORMA POLAR

4.1 SUMA Y RESTA

Para **SUMAR** y **RESTAR** números en forma polar es necesario pasarlos a forma binómica y realizar la operación requerida.

4.2 PRODUCTO

$$r_{\alpha} \cdot r'_{\beta} = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

Ejemplo 1: Calcula

$$3_{45°} \cdot 5_{60°} = (3 \cdot 5)_{45°+60°} = 15_{105°}$$

4.3 COCIENTE

$$\frac{r_{\alpha}}{r'_{\beta}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

Ejemplo 2: Calcula

$$\frac{3_{45°}}{5_{60°}} = \left(\frac{3}{5}\right)_{45°-60°} = \left(\frac{3}{5}\right)_{-15°} = \left(\frac{3}{5}\right)_{360°-15°} = \left(\frac{3}{5}\right)_{345°}$$

Ejemplo 3: Calcula el inverso de $z = 2_{270°}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{2_{270°}} = \left(\frac{1}{2}\right)_{0°-270°} = \left(\frac{1}{2}\right)_{-270°} = \left(\frac{1}{2}\right)_{360°-270°} = \left(\frac{1}{2}\right)_{90°}$$

4.4 POTENCIA

$$(r_{\alpha})^n = (r^n)_{n\alpha}$$

Fórmula de Moivre:

$$(cos\alpha + isen\alpha)^{\boldsymbol{n}} = cos\ n\alpha + isen\ n\alpha$$

(Esta fórmula nos evita utilizar el Bionomio de Newton que requería un gran esfuerzo)

Ejemplo 4: Calcula

$$3_{230°} \cdot (5_{60°})^3 = 3_{230°} \cdot (5^3)_{3\cdot 60°} = 3_{230°} \cdot 125_{180°} = (3 \cdot 125)_{230°+180°} = 375_{410}° =$$
$$= 375_{50°}$$

Ejemplo 5: Calcula utilizando la fórmula de Moivre y expresa en resultado en forma bonómica:

$$(cos15° + i\ sen15°)^6 = \cos 90 + i\ sen\ 90 = 0 + 1i = i$$

Ejemplo 6: Calcula expresando en forma binómica

$$\frac{-64i}{(2-2i)^4}$$

1º Expresamos en forma polar:

$$-64i \to \begin{cases} r = \sqrt{0^2+64^2} = 64 \\ tg\alpha = \frac{-64}{0} \to \begin{cases} \alpha = 90° \\ \alpha = 180° + 90° = 270° \end{cases} \end{cases} \to 64_{270°}$$

$$2-2i \to \begin{cases} r = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} \\ tg\alpha = \frac{-2}{2} = -1 \to \alpha = -45° \to \begin{cases} 360-45 = 315° \\ 180+(-45) = 135° \end{cases} \end{cases} \to \sqrt{8}_{315°}$$

2º Operamos en forma polar:

$$\frac{-64i}{(2-2i)^4} = \frac{64_{270°}}{\left(\sqrt{8}_{315°}\right)^4} = \frac{64_{270°}}{64_{1260}} = \frac{64_{270°}}{64_{180°}} = 1_{90°} = 1 \cdot (cos\, 90° + i\, sen\, 90°) = i$$

S5. Ejercicios: pág. 209, ej. 51, 52; pág. 200, ej. 26, 27.

4.5 RADICACIÓN

Un número complejo r_α tiene n ráices n-ésimas del tipo $\sqrt[n]{r_\alpha} = s_\beta$

- Todas las raíces tienen igual módulo, $s = \sqrt[n]{r}$
- Los argumentos se obtienen mediante la igualdad $n\beta = \alpha + k \cdot 360°$,

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Si $n > 2$ los afijos de las raíces n-ésimas forman un polígono regular de n lados.

Ejemplo 1: Halla los números complejos que cumplen $z^6 = -64$.

1º Despejamos el valor de z.

$$z^6 = -64 \to z = \sqrt[6]{-64}$$

2º Expresamos en forma polar.

$$-64 \to \begin{cases} r = \sqrt{64^2+0^2} = 64 \\ tg\alpha = \frac{0}{-64} = 0 \to \begin{cases} \alpha = 0° \\ \alpha = 180° + 0° = 180° \end{cases} \end{cases} \to 64_{180°}$$

3º Calculamos las seis soluciones.

$$r = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$6\beta = 180 + k \cdot 360 \rightarrow \beta = \frac{180 + k \cdot 360}{6} = 30 + k \cdot 60$$

$$\beta_1 = 30 + 0 \cdot 60 = 30 \rightarrow z_1 = 2_{30°}$$

$$\beta_2 = 30 + 1 \cdot 60 = 90 \rightarrow z_2 = 2_{90°}$$

$$\beta_3 = 30 + 2 \cdot 60 = 150 \rightarrow z_3 = 2_{150°}$$

$$\beta_4 = 30 + 3 \cdot 60 = 210 \rightarrow z_4 = 2_{210°}$$

$$\beta_5 = 30 + 4 \cdot 60 = 270 \rightarrow z_5 = 2_{270°}$$

$$\beta_6 = 30 + 5 \cdot 60 = 330 \rightarrow z_6 = 2_{330°}$$

Ejemplo 2: Calcula

$$\sqrt[5]{\frac{-64i}{-\sqrt{3} + i}}$$

1º Expresamos en forma polar:

$$-64i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{0^2 + (-64)^2} = 64 \\ tg\alpha = \dfrac{-64}{0} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 90° \\ \alpha = 180° + 90° = 270° \end{cases} \end{cases} \rightarrow 64_{270°}$$

$$-\sqrt{3} + i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \\ tg\alpha = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = -30° \rightarrow \begin{cases} 360 - 30 = 330° \\ 180 + (-30) = 150° \end{cases} \end{cases} \rightarrow 2_{150°}$$

2º Operamos en forma polar:

$$\sqrt[5]{\frac{-64i}{-\sqrt{3} + i}} = \sqrt[5]{\frac{64_{270°}}{2_{150°}}} = \sqrt[5]{32_{120}}$$

3º Calculamos las 5 soluciones:

$$r = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$5\beta = 120 + k \cdot 360 \rightarrow \beta = \frac{120 + k \cdot 360}{5} = 24 + k \cdot 72$$

$$\beta_1 = 24 + 0 \cdot 72 = 24 \rightarrow z_1 = 2_{24°}$$

$$\beta_2 = 24 + 1 \cdot 72 = 96 \rightarrow z_2 = 2_{96°}$$

$$\beta_3 = 24 + 2 \cdot 72 = 168 \rightarrow z_3 = 2_{168°}$$

$$\beta_4 = 24 + 3 \cdot 72 = 240 \rightarrow z_4 = 2_{240°}$$

$$\beta_5 = 24 + 4 \cdot 72 = 312 \rightarrow z_5 = 2_{312°}$$

S6. Ejercicios: pág. 202, ej. 30; pág. 209, ej. 55, 56.

5. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

El **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA** estable que dado un polinomio de grado n tendrá n raíces complejas.

No olvides que los números reales son un subconjunto de los números complejos, por los que las raíces reales obtenidas hasta ahora también se contabilizan.

Ejemplo:

a) Resuelve la ecuación $x^3 - x^2 + 2x + 4 = 0$.

b) Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$

a) Como el grado>3, resolvemos aplicando la regla de Ruffini:

	1	-1	2	4
-1		-1	0	2
	1	-2	4	0

Como el grado=2, resolvemos aplicando la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^1 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = \begin{matrix} 1 + \sqrt{3}i \\ 1 - \sqrt{3}i \end{matrix}$$

Soluciones: $x_1 = -1, x_2 = 1 + \sqrt{3}i, x_3 = 1 - \sqrt{3}i$

b) Aprovechando el apartado anterior:

$$P(x) = (x + 1) \cdot \left(x - \left(1 + \sqrt{3}i\right)\right) \cdot \left(x - \left(1 - \sqrt{3}i\right)\right)$$

S7. Ejercicios: pág. 203, ej. 32, 33; pág. 209, ej. 60.

S8. Ejercicios: Repaso

S9. Ejercicios: Pre-Examen 5. Números complejos.

Clara Benedicto Baldonado