# TEMA 5 y 6. VECTORES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

## 1. <u>VECTORES EN EL PLANO</u>

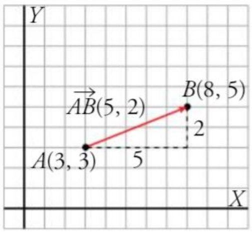
(Existen magnitudes físicas, como la fuerza o la velocidad, de las cuales necesitamos saber no solo su intensidad, sino también su dirección y su sentido)

Las **COORDENADAS DE UN VECTOR** se obtienen restando las coordenadas del punto **EXTREMO** menos las del punto **ORIGEN**. Es decir, dados los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ las coordenadas del vector $\overline{AB}$ son:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

<u>Ejemplo:</u> Dados los puntos $A(3,3)$ y $B(8,5)$ obtén las coordenadas del vector $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (8,5) - (3,3) = (5,2)$$




Un vector queda determinado por las siguientes características:

- El **MÓDULO** de un vector $\overline{AB} = (x, y)$ es la distancia de $A$ a $B$, y se calcula:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- La **DIRECCIÓN** de un vector viene señalada por la recta que contiene a $A$ y $B$.
- El SENTIDO determinado por la flecha. Cada dirección admite dos **SENTIDOS** opuestos.

<u>Ejemplo:</u> Calcula el módulo del vector $\overline{AB} = (5,2)$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Llamaremos **VECTORES EQUIPOLENTES** a todos aquellos vectores que tengan igual módulo, dirección y sentido. Las coordenadas de estos vectores serán las mismas.

Cada conjunto de vectores equipolentes tendrá un representante que llamaremos **VECTOR LIBRE** y vendrá representado mediante cualquiera de estos vectores fijos.

Dos **VECTORES PARALELOS**, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, tienen la misma dirección y por tanto sus coordenadas son proporcionales. Sea $\overline{AB} = (x_1, y_1)$ y $\overline{CD} = (x_2, y_2)$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$



Clara Benedicto Baldonado

Ejemplo 1: Tenemos tres puntos de coordenadas $A(3,3), B(7,6), C(7,-2)$. Calcula las coordenadas del punto $D$ para que los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sean equipolentes.

1º Llamamos $D(x,y)$

2º Calculamos los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

$$\overline{AB} = (7,6) - (3,3) = (4,3)$$

$$\overline{CD} = (x,y) - (7,-2) = (x-7, y+2)$$

3º Igualamos las coordenadas de los vectores y despejamos las incógnitas.

$$\overline{AB} = \overline{CD} \rightarrow \begin{cases} 4 = x - 7 \rightarrow x = 11 \\ 3 = y + 2 \rightarrow y = 1 \end{cases} \rightarrow D(11,1)$$

Ejemplo 2: Calcula el valor de m para que los vectores sean paralelos $\bar{u}(4,-6), \bar{v}(1,m)$.

$$\frac{4}{1} = \frac{-6}{m} \rightarrow 4m = -6 \rightarrow 4m = -6 \rightarrow m = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

***S1. Ejercicios: pág. 120, ej. 2; pág. 121, ej. 3, 4; pág. 132, ej. 25, 27.***

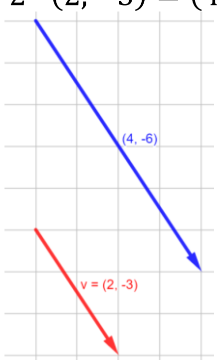
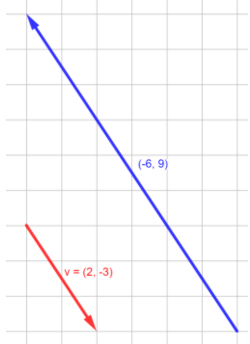
# 2. OPERACIONES CON VECTORES

## 2.1 PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

El **PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR**, $k \cdot \bar{v}$, es otro vector con

- Módulo=$|k| \cdot |\bar{v}|$
- Dirección: la misma que $\bar{v}$.
- Sentido: $\begin{cases} si\ k > 0\ el\ mismo\ que\ \bar{v} \\ si\ k < 0\ el\ opuesto\ a\ \bar{v} \end{cases}$

Ejemplo: Si $\bar{v} = (2,-3)$, calcula $2\bar{v}$ y $-3\bar{v}$

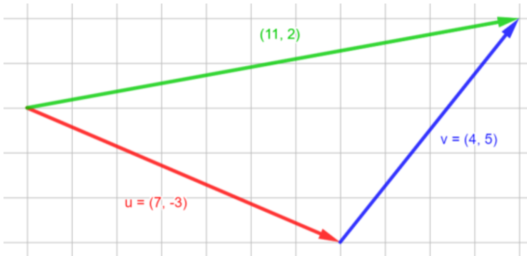
<table>
<tr>
<td>$2\bar{v} = 2 \cdot (2,-3) = (4,-6)$<br><br></td>
<td>$-3\bar{v} = -3(2,-3) = (-6,9)$<br><br></td>
</tr>
</table>

### 2.2 SUMA DE VECTORES

Las coordenadas del **VECTOR SUMA** $\bar{u} + \bar{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de $\bar{u}$ con las de $\bar{v}$.

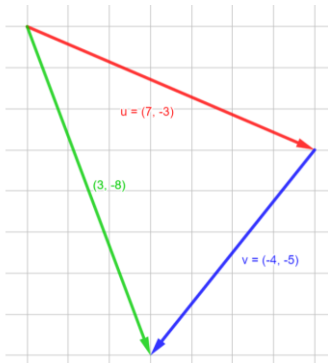
<u>Ejemplo:</u> Si $\bar{u} = (7, -3)$ y $\bar{v} = (4, 5)$, calcula $\bar{u} + \bar{v}$

$$\bar{u} + \bar{v} = (7, -3) + (4, 5) = (11, 2)$$




### 2.3 RESTA DE VECTORES

Las coordenadas del **VECTOR RESTA** $\bar{u} - \bar{v}$ se obtienen restando las coordenadas de $\bar{u}$ con las de $\bar{v}$.




<u>Ejemplo:</u> Si $\bar{u} = (7, -3)$ y $\bar{v} = (4, 5)$, calcula $\bar{u} - \bar{v}$

$$\bar{u} - \bar{v} = (7, -3) - (4, 5) = (3, -8)$$

### 2.4 COMBINACIÓN LINEAL

<u>Ejemplo:</u> Si $\bar{u} = (7, -4)$ y $\bar{v} = (-5, -2)$, calcula $3\bar{u} - \overline{2v}$

$$3\bar{u} - \overline{2v} = 3 \cdot (7, -4) - 2 \cdot (-5, -2) = (21, -12) - (-10, -4) = (31, -8)$$

***S2. Ejercicios: pág. 132, ej. 30, 31, 33, 34.***

# 3. <u>PRODUCTO ESCALAR</u>

### 3.1 PRODUCTO ESCALAR

El **PRODUCTO ESCALAR** de dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ es el número real que se obtiene de multiplicar los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\,(\widehat{\bar{u}, \bar{v}})$$

<u>Ejemplo:</u> De dos vectores sabemos que sus módulos son $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 4$ y el ángulo que forman es $\alpha = 60°$. Calcula $\bar{u} \cdot \bar{v}$.

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 3 \cdot 4 \cdot \cos(60) = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

**3.2 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR**

- Si $\widehat{\bar{u},\bar{v}} < 90° \rightarrow \ \bar{u}\cdot\ \bar{v} > 0$. Si $\widehat{\bar{u},\bar{v}} > 90° \rightarrow \ \bar{u}\cdot\ \bar{v} < 0$.
- Si $\bar{u}$y $\bar{v}$ son vectores no nulos, $\bar{u}\cdot\ \bar{v} = 0 \leftrightarrow \ \bar{u} \perp \bar{v}$ (son perpendiculares)
- Conmutativo: $\bar{u}\cdot\ \bar{v} = \bar{v}\cdot\ \bar{u}$.
- Distributivo: $\bar{u}\cdot\ (\bar{v}+\bar{w}) = \bar{u}\cdot\ \bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{w}$
- Asociativo: $k\cdot(\bar{u}\cdot\ \bar{v}) = (k\cdot\bar{u})\cdot\ \bar{v} = \bar{u}\cdot\ (k\cdot\bar{v})$

**3.3 EXPRESIÓN DEL PRODUCTO ESCALAR EN BASE CANÓNICA**

(En este curso trabajaremos en base canónica. Es decir, todos los vectores se pueden expresar como combinación lineal de los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$)

Si trabajamos en base canónica el **PRODUCTO ESCALAR** de dos vectores $\bar{u} = (x_1, y_1)$ y $\bar{v} = (x_2, y_2)$ se obtiene:

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$$

<u>Ejemplo:</u> Sean los vectores $\bar{u} = (3,4)$ y $\bar{v} = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$, calcula $\bar{u}\cdot\bar{v}$. ¿Puedes deducir algo?

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = 3\cdot(-2) + 4\cdot\frac{3}{2} = -6+6 = 0 \rightarrow \bar{u}\perp\bar{v}$$

***S3. Ejercicios: pág. 125, ej. 11, 12, 14; pág. 126, ej. 16, 17; pág. 133, ej. 50 a, 52.***

# 4. <u>APLICACIONES</u>

**4.1 ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES**

Utilizando las dos definiciones de producto escalar:

$$\left.\begin{array}{r}\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot cos\ (\widehat{\bar{u},\bar{v}})\\ \bar{u}\cdot\bar{v} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2\end{array}\right\} \rightarrow \cos(\widehat{\bar{u},\bar{v}}) = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\cdot\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}$$

<u>Ejemplo:</u> Calcula el ángulo formado por los vectores $\bar{u} = (4,2)$ y $\bar{v} = (-1,5)$.

$$\cos(\widehat{\bar{u},\bar{v}}) = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|} = \frac{4\cdot(-1)+2\cdot5}{\sqrt{4^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+5^2}} = \frac{-4+10}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{26}} = \frac{6}{\sqrt{520}} = 0{,}26$$

$$\alpha = arc\cos(0{,}26) = 74{,}93°$$

**4.2 VECTORES ORTONALES**

Dado el vector $\bar{u} = (a, b)$, un **VECTOR ORTOGONAL/PERPENDICULAR** a él será $\bar{v} = (-b, a)$.

***S4. Ejercicios: pág. 127, ej. 20; pág. 133, ej. 54, 57, 60; pág. 134, ej. 79, 80.***

# 5. PUNTOS ALINEADOS

Tres puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ están **ALINEADOS** si y solo si los vectores $\overline{AB}$ y $\bar{B}C$ tienen la misma dirección, es decir, si las coordenadas de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionals.

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

Ejemplo 1: Comprueba si los puntos $A(2, -1), B(6, 1)$ y $C(8, 2)$ están alineados.

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} = (6,1) - (2,-1) = (4,2) \\ \overline{BC} = (8,2) - (6,1) = (2,1)\end{array}\right\} \to \frac{4}{2} = \frac{2}{1} \to 2 = 2$$

Ejemplo 2: Calcula el valor de $m$ para que los puntos $P(1, 4), Q(5, -2)$ y $R(6, m)$ estén alineados.

$$\left.\begin{array}{r}\overline{PQ} = (5,-2) - (1,4) = (4,-6) \\ \overline{QR} = (6,m) - (5,-2) = (1,m+2)\end{array}\right\} \to \frac{4}{1} = \frac{-6}{m+2} \to$$

$$4(m+2) = -6 \to 4m + 8 = -6 \to 4m = -14 \to m = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$$

# 6. DIVISIONES DE UN SEGMENTO

**6.1 PUNTO MEDIO**

Si $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$, las coordenadas del **PUNTO MEDIO**, $M$, del segmento $AB$ son

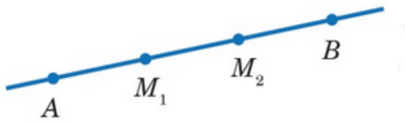
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo: Halla el punto medio del segmento comprendido entre los puntos $A(7, 10)$ y $B(11, 2)$.

$$M\left(\frac{7 + 11}{2}, \frac{10 + 2}{2}\right) = (9, 6)$$

### 6.2 DIVISIÓN EN TRES PARTES

Al **DIVIDIR** el segmento $AB$ **EN TRES PARTES** obtendremos 2 puntos intermedios $M_1$ y $M_2$ que cumplirán que $2\overline{AM_1} = \overline{M_1B}$ y $\overline{AM_2} = 2\overline{M_2B}$.




$$2\overline{AM_1} = \overline{M_1B} \to 2\cdot(M_1 - A) = B - M_1 \to 3M_1 = B + 2A \to M_1 = \frac{2A+B}{3}$$
$$\overline{AM_2} = 2\overline{M_2B} \to M_2 - A = 2\cdot(B - M_2) \to 3M_2 = A + 2B \to M_2 = \frac{A+2B}{3}$$

Ejemplo: Calcula las coordenadas de los puntos $P$ y $Q$ que dividen segmento de extremos $A(-3,2)$ y $B(5,-6)$ en tres partes iguales.

$$P = \left(\frac{2\cdot(-3)+5}{3}, \frac{2\cdot 2+(-6)}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$
$$Q = \left(\frac{-3+2\cdot 5}{3}, \frac{2+2\cdot(-6)}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{10}{3}\right)$$

### 6.3 DIVISIÓN EN n PARTES

En general, si dividimos un segmento $AB$ **EN n PARTES** obtendremos n-1 puntos intermedios $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ que cumplirán que:

$$M_i = \frac{(n-i)\cdot A + i\cdot B}{n}$$

***S5. Ejercicios: pág. 143, ej. 1, 2, 3, 4.***

## 7. ECUACIONES DE LA RECTA

### 7.1 ECUACIONES DE LA RECTA

Cualquier punto de una recta, $(x,y)$, se puede describir por un punto $A(x_0,y_0)$ y un vector director $\bar{d} = (a,\mathrm{b})$.

*ECUACIÓN VECTORIAL:*

$$(x,y) = (x_0,y_0) + \lambda(\mathrm{a},b)$$

*ECUACIONES PARAMÉTRICAS:*

Igualando coordenada a coordenada:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$$

*ECUACIÓN CONTINUA*

Si aislamos el parámetro $\lambda$ e igualamos ambas expresiones:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{\mathrm{b}}$$

*ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE*

Si liberamos a la variable dependiente de su denominador nos aparece la pendiente de la recta.

$$y - y_0 = \frac{b}{a} \cdot (x - x_0) \rightarrow m = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

*ECUACIÓN EXPLÍCITA*

Si aislamos la $y$:

$$y = \frac{b}{a} \cdot (x - x_0) + y_0 \rightarrow y = mx + n$$

*ECUACIÓN GENERAL*

Retomando la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{\mathrm{b}} \rightarrow b \cdot (x - x_0) = a \cdot (y - y_0) \rightarrow bx - bx_0 = ay - ay_0$$

$$bx - ay + (-bx_0 + ay_0) = 0 \rightarrow Ax + By + C = 0 \; siendo \; \bar{d} = (-B, A)$$

Además, $\bar{n} = (A, B)$ es un **VECTOR NORMAL** a la recta, vector ortogonal.

Ejemplo: Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(5,5)$.

1º Calculamos el vector director: $\overline{AB} = (5,5) - (1,3) = (4,2)$

2º Obtenemos la **ECUACIÓN VECTORIAL**:

$$(x, y) = (1,3) + \lambda(4,2)$$

3º Obtenemos las **ECUACIONES PARAMÉTRICAS**:

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

4º Obtenemos la **ECUACIÓN CONTINUA:**

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}$$

5º Obtenemos la **ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE**:

$$y-3=\frac{2}{4}\cdot(x-1)$$

6º Obtenemos la **ECUACIÓN EXLPÍCITA**:

$$2(x-1)=4(y-3)\rightarrow 2x-2=4y-12\rightarrow 4y=2x+10\rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

7º Obtenemos la **ECUACIÓN GENERAL**:

$$2(x-1)=4(y-3)\rightarrow 2x-2=4y-12\rightarrow 4y=2x+10\rightarrow 2x-4y+10=0$$

***S6-7. Ejercicios: pág. 144, ej. 6, 7; pág. 145, ej. 9; pág. 146, ej. 11; pág. 148, ej. 13; pág. 159, ej. 33, 38.***

## 7.2 PUNTO Y VECTOR DE UNA RECTA A PARTIR DE SU ECUACIÓN

Ejemplo: Encuentra un vector director y un punto de las siguientes rectas:

**a.** $\frac{x-5}{3}=\frac{y+3}{2}$

$$P(5,-3),\bar{d}=(3,2)$$

**b.** $\begin{cases}x=4+3\lambda\\ y=7-5\lambda\end{cases}$

$$P(4,7),\bar{d}=(3,-5)$$

**c.** $y=\frac{2}{3}x-\frac{19}{3}$

Damos un valor cualquiera a $x=0$ y substituimos para obtener la $y$

$$y=\frac{2}{3}\cdot 0-\frac{19}{3}=-\frac{19}{3}$$

$$P\left(0,-\frac{19}{3}\right),\bar{d}=(3,2)$$

**d.** $5x-3y+15=0$

Damos un valor cualquiera a $x=0$ y substituimos para obtener la $y$

$$5\cdot 0-3y+15=0\rightarrow -3y+15=0\rightarrow 3y=15\rightarrow y=5\rightarrow P(0,5)$$

$$\bar{d}=(-B,A)\rightarrow \bar{d}=(3,5)$$

***S8. Ejercicios: pág. 144, ej. 8; pág. 145, ej. 10; pág. 146, ej. 12; pág. 148, ej. 14, 15. (pág. 159, ej. 34, 35, 37, 39)***

**7.3 ECUACIÓN DE LA RECTA PARALELA Y PERPENDICULAR**

Dos rectas son **PARALELAS** si tienen la misma pendiente o vector director:

$$m = \frac{b}{\mathrm{a}}, \bar{d} = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$$

Ejemplo: Obtén la ecuación continua de la recta que pasa por $(4, -3)$ y es paralela a $2x + 5y - 4 = 0$

1º Obtenemos el vector director:

$$\bar{d} = (-5, 2)$$

2º Obtenemos la ecuación de la recta con el vector y el punto:

$$\frac{x-4}{-5} = \frac{y+3}{2}$$

Dos rectas son **PERPENDICULARES** si los vectores directores son perpendiculares:

$$(a, b) \text{ y } (-b, a)$$

Ejemplo: Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(-7, 2)$ y es perpendicular a $5x - 3y + 15 = 0$

1º Obtenemos el vector director:

$$\bar{d} = (3, 5) \to \bar{n} = (5, -3)$$

2º Obtenemos la ecuación de la recta con el vector y el punto:

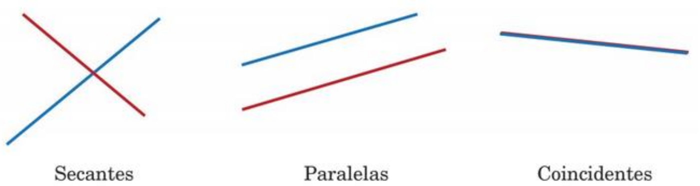
$$\begin{cases} x = -7 + 5t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$$

***S9. Ejercicios: pág. 159, ej. 40, 41, 42, 43, 44; pág. 160, ej. 48, 52.***

# 8. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

La **POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS** puede ser:

- Secantes.
- Paralelas.
- Coincidentes.



### 8.1 CONSIDERANDO LOS VECTORES DIRECTORES

Para estudiar la posición relativa de dos rectas podemos utilizar sus vectores directores $\bar{d}_r(a_r, b_r)$ y $\bar{d}_s(a_s, b_s)$:

- Si tienen **DIFERENTES DIRECCIONES** $\frac{a_r}{a_s} \neq \frac{b_r}{b_s}$ → **SECANTES.**
- Si tienen **LA MISMA DIRECCIÓN** $\frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s}$ → **PARAELAS O COINCIDENTES.** En este caso, tomamos un punto de una de las rectas y comprobamos si cumple la ecuación de la otra.
    - Si no cumple la ecuación → **PARAELAS.**
    - Si cumple la ecuación → **COINCIDENTES.**

Ejemplos: Estudia la posición relativa de las rectas y calcula en su caso el punto de corte.

a) $r: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \epsilon \mathbb{R} \quad s: \begin{cases} x = -1 + \beta \\ y = 1 + 3\beta \end{cases}, \beta \epsilon \mathbb{R}$

$\bar{d}_r(-1,1)$ y $\bar{d}_s(1,3)$ → $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{3}$ → **Secantes**

Para obtener el punto de corte debemos resolver el sistema de ecuaciones. Para ello igualamos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} 3 - \lambda = -1 + \beta \\ 1 + \lambda = 1 + 3\beta \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -\lambda - \beta = -4 \\ \lambda - 3\beta = 0 \end{matrix} \rightarrow -4\beta = -4 \rightarrow$$

$$\beta = 1 \rightarrow \lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = 3$$

Sustituyendo obtenemos el valor del punto de intersección:

$$\begin{matrix} x = 3 - 3 = 0 \\ y = 1 + 3 = 4 \end{matrix} \rightarrow P(0,4)$$

b) $r: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \epsilon \mathbb{R} \quad s: \begin{cases} x = -1 + \beta \\ y = 1 - \beta \end{cases}, \beta \epsilon \mathbb{R}$

$\bar{d}_r(-1,1)$ y $\bar{d}_s(1,-1)$ → $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$ → **Paralelas o coincidentes**

Tomamos un punto de una de las rectas, por ejemplo, $P_r(3,1)$ y sustituimos en la otra ecuación.

$\begin{cases} 3 = -1 + \beta \\ 1 = 1 - \beta \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \beta = 4 \\ \beta = 0 \end{matrix} \rightarrow 4 \neq 0$ → El punto no pertenece a la recta, **paralelas.**

**8.2 CONSIDERANDO EL SISTEMA DE ECUACIONES**

Para estudiar la posición relativa de dos rectas podemos resolver el sistema de ecuaciones:

- Si el sistema es **compatible determinado**, una solución → **secantes.**
- Si el sistema es **compatible indeterminado**, infinitas soluciones $(0=0)$ → **coincidentes.**
- Si el sistema es **incompatible**, sin solución $(0=número)$ → **paralelas.**

Ejemplo: Estudia la posición relativa de las rectas y calcula en su caso el punto de corte.

a) $r: 5x-4y+10=0$
$s: y=2x+1$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$5x-4\cdot(2x+1)+10=0 \rightarrow 5x-8x-4+10=0 \rightarrow -3x+6=0 \rightarrow$$

$$x=2$$

$$y=2\cdot 2+1=5 \rightarrow y=5$$

Las rectas se cortan en $(2,5)$

b) $r: \frac{x-3}{5}=\frac{y-8}{-5}$
$s: x+y=11$

1º Obtenemos la ecuación general de la recta $r$

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y-8}{-5} \rightarrow -5\cdot(x-3)=5\cdot(y-8) \rightarrow -5x+15=5y-40$$

$$5x+5y-55=0$$

2º Resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$x=11-y \rightarrow 5\cdot(11-y)+5y-55=0 \rightarrow 55-5y+5y-55=0 \rightarrow$$

$$0=0$$

El sistema tiene infinitos puntos de corte, las rectas son **coincidentes**.

***S10. Ejercicios: pág. 150, ej. 16, 17, 18; pág. 160, ej. 50, 53.***

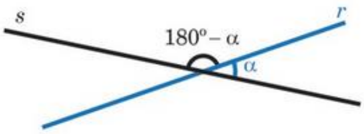
# 9. ÁNGULO DE DOS RECTAS

Dos rectas secantes forman dos ángulos suplementarios. Se define **EL ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS** como el menor de los ángulos que forman.

### 9.1 MEDIANTE LOS VECTORES DIRECTORES

$$\cos\left(\widehat{\overline{d_r}, \overline{d_s}}\right) = \frac{\overline{d_r} \cdot \overline{d_s}}{|\overline{d_r}| \cdot |\overline{d_s}|}$$

- Si $\widehat{\overline{d_r}, \overline{d_s}} < 90° \rightarrow \widehat{r, s} = \widehat{\overline{d_r}, \overline{d_s}}$
- Si $\widehat{\overline{d_r}, \overline{d_s}} > 90° \rightarrow \widehat{r, s} = 180 - \widehat{\overline{d_r}, \overline{d_s}}$




Ejemplo: Estudia el ángulo que forman las rectas $r: 2x + 3y + 5 = 0$ y $s: \frac{x+4}{5} = \frac{y-2}{1}$

$$\bar{d}_r = (-3, 2), \bar{d}_s = (5, 1)$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{d_r}, \overline{d_s}}\right) = \frac{-3 \cdot 5 + 2 \cdot 1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\widehat{\overline{d_r}, \overline{d_s}} = arc \cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135 \rightarrow \widehat{r, s} = 180 - 135 = 45$$

### 9.2 MEDIANTE LAS PENDIENTES

$$\text{tg}(\widehat{r, s}) = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

Ejemplo: Estudia el ángulo que forman las rectas $r: y = -x + 3$ y $s: y = 2x - 1$.

$$m_r = -1, m_s = 2$$

$$\text{tg}(\widehat{r, s}) = \left|\frac{2 - (-1)}{1 + (-1) \cdot 2}\right| = 3 \rightarrow \widehat{r, s} = arc\ tg\ (3) = 71{,}57°$$

***S11. Ejercicios: pág. 151, ej. 20, 21; pág. 160, ej. 54, 56, 58.***

# 10. DISTANCIAS

### 10.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La **DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS** $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se obtiene:

$$d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo: Calcula la distancia entre $A(-1,4)$ y $B(-5,1)$

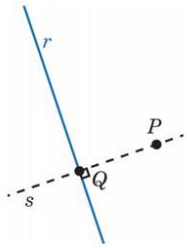
1º Calculamos el vector: $\overline{AB} = (-5,1) - (-1,4) = (-4,-3)$

2º Calculamos el módulo:

$$d(A,B) = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

### 10.1 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La **DISTANCIA DE UN PUNTO** $P(x_0, y_0)$ **A UNA RECTA** $Ax + By + C = 0$ se obtiene:




$$d(P,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo: Calcula la distancia del punto $A(-1,3)$ a la recta $r: x + y - 1 = 0$.

$$d(P,r) = \frac{|1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

### 10.3 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

- Si las rectas son **secantes o coincidentes**→ $d(r,s) = 0$
- Si las rectas son **paralelas**, tomaremos un punto cualquiera de una de las rectas y calcularemos la distancia de ese punto a la otra recta.

Ejemplo: Calcula la distancia a la que se encuentran las rectas

$$r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-1} \quad \text{y} \quad s: x + 4y + 7 = 0$$

1º Estudiamos la posición relativa de las rectas:

$$\bar{d}_r = (4,-1), \bar{d}_s = (-4,1) \rightarrow \frac{4}{-4} = \frac{-1}{1} \rightarrow r \parallel s$$

2º Tomamos un punto de una de las rectas: $P_r = (3,-2)$

3º Estudiamos la posición de dicho punto a la otra recta.

$$d(P,s) = \frac{|1 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + 7|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}} u$$

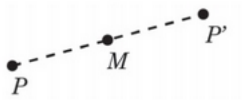
***S12. Ejercicios: pág. 152, ej. 22, 23, 24; pág. 161, ej. 62, 63, 64.***

# 11. SIMETRÍA

## 11.1 SIMÉTRICO D EUN PUNTO RESPECTO DE OTRO PUNTO

Si $P'$ en el **SIMÉTRICO** de $P$ respecto de $M$, entonces $M$ es el punto medio del segmento $PP'$.

$$M = \frac{P + P'}{2} \rightarrow P' = 2M - P$$

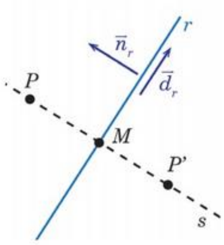



Ejemplo: Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(7, 2)$ respecto de $M(4, 4)$

$$A' = (2 \cdot 4 - 7, \qquad 2 \cdot 4 - 2) = (1, 6)$$

## 11.1 SIMÉTRICO D EUN PUNTO RESPECTO DE UNA RECTA

Para hallar $P'$, en **PUNTO SIMÉTRICO DE UN PUNTO $P$ RESPECTO A UNA RECTA $r$**:




1º Calculamos la recta perpendicular a $r$ que pasa por el punto $P$.

2º Calculamos el punto medio $M$, resolviendo el sistema de ecuaciones entre las dos rectas.

3º Calculamos el punto $P'$, consideramos el punto $P$ y el punto medio $M$.

Ejemplo: Calcula el punto simétrico a $P(1, 4)$ respecto de la recta $r: 3x - 2y - 8 = 0$.

1º Construimos la recta perpendicular a $r$ que pasa por $P(1, 4)$.

$$\bar{d}_r = (2, 3) \rightarrow \bar{d}_s = (-3, 2) \rightarrow s: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-4}{2} \rightarrow 2x - 2 = -3y + 12 \rightarrow 2x + 3y - 14 = 0$$

2º Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} r: 3x - 2y - 8 = 0 \\ s: 2x + 3y - 14 = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} r: 6x - 4y - 16 = 0 \\ s: -6x - 9y + 42 = 0 \end{matrix} \rightarrow -13y + 26 = 0 \rightarrow y = 2$$

$$3x - 2 \cdot 2 - 8 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow M(4,2)$$

3º Calculamos el punto simétrico $P' = 2M - P$

$$P'(2 \cdot 4 - 1, 2 \cdot 2 - 4) = (7, 0)$$

***S13. Ejercicios: pág. 153, ej. 25, 26; pág. 161, ej. 74, 75.***

## 12. PROBLEMAS

Ejemplo: Los puntos $A\ (0,5), B(-2,1), C(5,1)$ forman un triángulo.

a) Calcula las rectas que definen los tres lados

b) Calcula el ortocentro.

c) Calcula el circuncentro.

d) Calcula el baricentro.

a) Calculamos las rectas que definen los tres lados:

- La recta $r$ es la que contiene el punto $A\ (0,5)$ y el vector $\overline{AB} = (-2,-4)$

$$r: \frac{x-0}{-2} = \frac{y-5}{-4} \to -4x = -2y + 10 \to y = 2x + 5$$

- La recta $s$ es la que contiene el punto $B\ (-2,1)$ y el vector $\overline{BC} = (7,0)$

$$r: \frac{x+2}{7} = \frac{y-1}{0} \to -0 = 7y - 7 \to s: y = 1$$

- La recta $t$ es la que contiene el punto $C\ (5,1)$ y el vector $\overline{CA} = (-5,4)$

$$r: \frac{x-5}{-5} = \frac{y-1}{4} \to 4x - 20 = -5y + 5 \to y = -\frac{4}{5}x + 5$$

b) El ortocentro es el punto donde se cortan las alturas. Cada una de las alturas pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

- La altura $h_A$ pasa por $A\ (0,5)$ y es perpendicular a $s: y = 1$

$$\bar{d}_s = (1,0) \to \bar{d} = (0,1) \to h_A: \frac{x-0}{0} = \frac{y-5}{1} \to x = 0$$

- La altura $h_B$ pasa por $B\ (-2,1)$ y es perpendicular a $t: y = -\frac{4}{5}x + 5$

$$\bar{d}_t = (5,-4) \to \bar{d} = (4,5) \to h_A: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{5} \to y = \frac{5}{4}x + \frac{7}{2}$$

- La altura $h_C$ pasa por $C\ (5,1)$ y es perpendicular a $r: y = 2x + 5$

$$\bar{d}_r = (1,2) \to \bar{d} = (-2,1) \to h_A: \frac{x-5}{-2} = \frac{y-1}{1} \to y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

c) El circuncentro es el punto donde se cortan las tres mediatrices. Cada una de las mediatrices es perpendicular a un lado en su punto medio.

- La mediatriz $m_{AB}$ pasa por $M_1 = \left(\frac{0-2}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (-1, 3)$ y es perpendicular a $r: y = 2x + 5$

$$\bar{d}_r = (1,2) \to \bar{d} = (-2, 1) \to m_{AB}: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{1} \to y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

- La mediatriz $m_{BC}$ pasa por $M_2 = \left(\frac{-2+5}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y es perpendicular a $s: y = 1$

$$\bar{d}_s = (1,0) \to \bar{d} = (0, 1) \to m_{BC}: \frac{x-\frac{3}{2}}{0} = \frac{y-1}{1} \to x = \frac{3}{2}$$

- La mediatriz $m_{CA}$ pasa por $M_3 = \left(\frac{5+0}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$ y es perpendicular a $t: y = -\frac{4}{5}x + 5$

$$\bar{d}_t = (5, -4) \to \bar{d} = (4, 5) \to m_{CA}: \frac{x-\frac{5}{2}}{4} = \frac{y-3}{5} \to y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{8}$$

d) El baricentro es el punto donde se cortan las tres medianas. Cada una de las medianas pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

- La mediana $m_A$ pasa por $A\ (0, 5)$ y por $M_2 = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

$$\overline{AM_2} = \left(\frac{3}{2}, -4\right) \to m_A: \frac{x-0}{3/2} = \frac{y-5}{1} \to y = -\frac{8}{3}x + 5$$

- La mediana $m_B$ pasa por $B(-2, 1)$ y por $M_3 = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$

$$\overline{BM_3} = \left(\frac{9}{2}, 2\right) \to m_B: \frac{x+2}{9/2} = \frac{y-1}{2} \to y = \frac{4}{9}x + \frac{17}{9}$$

- La mediana $m_C$ pasa por $C(5,1)$ y por $M_1 = (-1, 3)$

$$\overline{CM_1} = (-6, 2) \to m_B: \frac{x-5}{-6} = \frac{y-1}{2} \to y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

***S14. Ejercicios: pág. 161, ej. 65; pág. 162, ej. 80, 81, 82, 83, 94.***

***S15. Ejercicios: Repaso.***

***S16. Ejercicios: Repaso.***

***S17. Ejercicios: Repaso.***

***S18. Ejercicios: Pre-Examen 4. Vectores y geometría analítica.***