PROBLEMA DE POTÈNCIES I ARRELS

UN NOMBRE SUPEDITAT

Un nombre natural N està supeditat a les dues condicions següents:

- $\frac{N}{7}$ ha de ser un quadrat perfecte.
- $\frac{N}{2}$ ha de ser un cub perfecte.
-

Troba el menor dels nombres N que, a més de les condicions anteriors, compleix que és divisible per 5^3.

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi". Problemes Olímpics.

Número 83. Febrer 2016

PROBLEMA DE POTÈNCIES I ARRELS

SOLUCIÓ:

El nombre buscar és 85.750.000

Si $\frac{N}{7}$ és un quadrat perfecte, $\frac{N}{7} = a^2 \rightarrow N = 7a^2$

Si $\frac{N}{2}$ és un cub perfecte, $\frac{N}{2} = b^3 \rightarrow N = 2b^3$

- Com $N = 7a^2 = 2b^3$ el nombre 7 ha d'estar en la descomposició factorial i per tant b^3 serà divisible per 7^3 $(N = 7a^2 = 2b^3 = 2 \cdot 7^3 \cdot \ldots^3)$.

- Com $N = 7a^2 = 2b^3$ el nombre 2 ha d'estar en la descomposició factorial i per tant a^2 serà divisible per 2^2, $(N = 2b^3 = 7a^2 = 7 \cdot 2^2 \cdot \ldots^2)$. Però b^3 tindrà el 2 en la seua descomposició i per ser un cub serà divisible per 2^3. Com a mínim N contindrà el 2 quatre vegades $(N = 2b^3 = 2 \cdot 2^3 \cdot 7^3 \cdot \ldots^3 = 7 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \ldots^2 = 7a^2)$

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi". Problemes Olímpics.

Número 83. Febrer 2016

PROBLEMA DE POTÈNCIES I ARRELS

- Per ser divisible per 5^3 el nombre 5 ha d'estar en la descomposició. Ara bé, com que ha de ser un quadrat perfecte i també un cub perfecte, el mínim exponent que pot tindre és sis.

  Aleshores el nombre mínim és $N = 2^4 \cdot 7^3 \cdot 5^6 = 85.750.000$

Dificultat: 20